# Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

| **1.** | **2.** | **3.** |
|---|---|---|
| **c)** | **d)** | **d)** |

**4.** Por definição de aplicação injectiva, pretende-se prova a implicação

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

Supondo então que se tem $f(x) = f(y)$, resulta que $g(f(x)) = g(f(y))$, onde, por definição de aplicação composta,

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x), \quad g(f(y)) = (g \circ f)(y).$$

Deste modo, resulta da injectividade de $g \circ f$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) \implies x = y.$$

**5.**

**5.1.** Uma vez que o 5 tem de aparecer, há 4 possibilidades para posicionar este dígito: ou como algarismo das unidades, ou como algarismo das dezenas, ou como algarismo das centenas, ou como algarismo dos milhares.

Suponhamos que o 5 se posiciona como o algarismo dos milhares. Nesta situação, como o algarismo 5 não pode aparecer outra vez, o algarismo das centenas terá de ser escolhido de entre os algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{5\}$, num total de 8 possibilidades. Fixado este algarismo, o algarismo das dezenas terá de ser um dígito diferente dos já escolhidos para algarismos dos milhares e das centenas. Existem assim 7 possibilidades para a escolha do algarismo das dezenas. Finalmente e por um raciocínio semelhante, restam 6 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades. Ou seja, fixado o 5 como algarismo dos milhares, existem $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilidades para a escolha dos restantes algarismos.

Um raciocínio análogo aplica-se no caso do 5 ser escolhido como algarismo das centenas, das dezenas, ou das unidades. Tendo presente todas estas possibilidades, existe assim um total de

$$4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$$

números de 4 dígitos não repetidos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que contêm o algarismo 5.

**5.2.** Nesta alínea não existem limitações ao número de vezes que o dígito 5 pode aparecer. Tanto pode aparecer uma vez, como duas, três, ou até mesmo quatro vezes. Uma maneira de resolver esta questão será calcular, primeiro, o número total de números de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (cujo valor é $9^4 = 6561$) e, depois, subtrair o número total de números de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{5\}$ (cujo valor é igual a $8^4 = 4096$). Obtém-se assim um total de

$$6561 - 4096 = 2465$$

números diferentes de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que contêm o algarismo 5.

**6.**

**6.1. Case Base: $\mathbf{n = 0}$**. Neste caso tem-se para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ (ou todo o $x, y \in \mathbb{C}$),

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0,$$

o que prova o caso base.

**Hipótese de indução:** Dado $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

para quaisquer números reais (ou complexos) $x, y$.

**Tese de indução:** Para quaisquer números reais (ou complexos ) $x, y$,

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Para se provar a tese de indução note-se que

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

em que pela hipótese de indução,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{0} x y^n + \binom{n}{1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^3 y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} x^n y + \binom{n}{n} x^{n+1} \\
&\quad + \binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{1} x y^n + \binom{n}{2} x^2 y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^n y \\
&= \binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-(k-1)}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Atendendo a que pela lei de Pascal,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

e que

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1},$$

resulta que (1) é igual a

$$\binom{n+1}{0} y^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-(k-1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

o que completa a prova da tese de indução.

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, dados dois quaisquer números reais (ou complexos) $x, y$, tem-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**6.2.** De acordo com o Binómio de Newton,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2k} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Por outro lado, e pelo mesmo resultado,

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + \binom{n}{2k} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Isto é,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k},$$

pelo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

**7.** Comece-se por observar que

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}^2 \tag{2}$$

em que, pela lei da simetria e pela convolução de Vandermonde,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{2n-k} = \binom{4n}{2n}.$$

Deste modo, a igualdade (2) pode escrever-se, equivalentemente, como

$$\binom{4n}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}^2. \tag{3}$$

Mas, novamente pela lei da simetria tem-se que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{2n-k}^2,$$

onde, pela mudança de variável $2n - k = m$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{2n-k}^2 = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{2n}{m}^2 = \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{m}^2 - \binom{2n}{n}^2.$$

Ou seja, (3) é equivalente a

$$\binom{4n}{2n} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}^2 - \binom{2n}{n}^2,$$

o que conduz à igualdade pretendida.