ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve Resolução

Grupo I.

1. Tem-se $CB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 2 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$. As outras alíneas estão erradas, por exemplo $C^2 = C \times C$ não faz sentido pois uma matriz com 3 colunas só pode ser multiplicada (à direita) por uma matriz com 3 linhas.

2. O subconjunto A de $\mathbb{R}^3$ é constituído pelos vetores da forma $(x, y, x+y)$, sendo imediato verificar que $(0,0,0) \in A$. Consideremos agora u e v, dois elementos de A, ou seja da forma $u = (x,\ y,\ x+y)$ e $v = (x',\ y',\ x'+y')$. Então $u+v = \big((x+x'),\ (y+y'),\ (x+x')+(y+y')\big)$ e portanto $u+v$ pertence a A.

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $\lambda u = \lambda(x,\ y,\ x+y) = \big(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda(x+y)\big) = \big(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda x + \lambda y\big)$, e portanto λu pertence a A. Concluímos então que A é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O subconjunto B de $\mathbb{R}_3[x]$ é constituído pelos polinómios p de grau menor ou igual a 3 tais que $p(1) = p(4)$. O polinómio nulo, ou seja o polinómio p tal que $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, verifica portanto a condição $p(1) = p(4)$. Consideremos agora p e q, dois elementos de B, ou seja tais que $p(1) = p(4)$ e $q(1) = q(4)$. Por definição de soma de funções tem-se $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ e $\big(\lambda p\big)(x) = \lambda(p(x))$. Então $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(4) + q(4) = (p+q)(4)$, e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $\big(\lambda p\big)(1) = \lambda(p(1)) = \lambda(p(4)) = \big(\lambda p\big)(4)$, ou seja $p+q$ e λp ainda estão em B. Concluímos então que B é um subespaço $\mathbb{R}_3[x]$.

O subconjunto C de $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é constituído pelas matrizes A que comutam com todas as matrizes de ordem 3. A matriz nula comuta com todas as matrizes pois $0.X = 0 = X.0, \forall X \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Consideremos agora A e B, duas matrizes de C, ou seja tais que $AX = XA, \forall X \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $BX = XB, \forall X \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então $(A+B)X = AX + BX = XA + XB = X(A+B)$ e $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = X(\lambda A), \forall \lambda \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, ou seja $A+B$ e λA ainda estão em C. Concluímos então que C é um subespaço $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

O subconjunto D de $\mathbb{R}^4$ é constituído pelos vetores (x, y, z, w) de $\mathbb{R}^4$ cujas componentes satisfazem $x = y + w$ e $z = 2x + w$, ou de forma mais prática $x = y + w$ e $z = 2(y+w) + w = 2y + 3w$. A vantagem é que podemos escrever estes vetores na forma $(y+w,\ y,\ 2y+3w,\ w)$ usando apenas as variáveis y e w. É imediato verificar que $(0,0,0,0) \in D$. Consideremos agora u e v, dois elementos de D, ou seja da forma $u = (y+w,\ y,\ 2y+3w,\ w)$ e $v = (y'+w',\ y',\ 2y'+3w',\ w')$. Então

$$\begin{aligned} u+v &= \big((y+w)+(y'+w'),\ (y+y'),\ (2y+3w)+(2y'+3w'),\ (w+w')\big) \\ &= \big((y+y')+(w+w'),\ (y+y'),\ 2(y+y')+3(w+w'),\ (w+w')\big), \end{aligned}$$

e portanto $u+v$ pertence a D.

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda\big(y+w,\ y,\ 2y+3w,\ w\big) \\ &= \big(\lambda(y+w),\ \lambda y,\ \lambda(2y+3w),\ \lambda w\big) \\ &= \big(\lambda y + \lambda w,\ \lambda y,\ 2(\lambda y) + 3(\lambda w),\ \lambda w\big), \end{aligned}$$

e portanto λu pertence a D. Concluímos então que D é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Portanto os 4 conjuntos A, B, C e D são subespaços.

3. Tem-se $\det\left(-2A^{-1}B^2C^{-1}\right) = (-2)^3(\det A)^{-1}(\det B)^2(\det C)^{-1} = -8.$

4. Tem-se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \alpha & 9 \end{vmatrix} = 6(\alpha - 8) \neq 0 \iff \alpha \neq 8$, e portanto $\forall \alpha \neq 8$ existe uma única solução. Para $\alpha = 8$ sabemos que o sistema pode ser indeterminado ou impossível.

Temos que $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ e portanto a característica da matriz é igual à característica da matriz aumentada que é 2. Como 2 é menor que 3 (*o número de variáveis*) o sistema é indeterminado.

Grupo II.

(i) A é invertível pois $\det A = -\frac{43}{540} \neq 0$. Usando transformações elementares sobre linhas obtemos $A^{-1} = \frac{3}{43}\begin{bmatrix} -2 & -36 & 60 \\ -45/2 & 25 & 30 \\ 15 & 12 & -20 \end{bmatrix}$.

(ii) A matriz dos cofatores é $\begin{bmatrix} 1/90 & 1/8 & -1/12 \\ 1/5 & -5/36 & -1/15 \\ -1/3 & -1/6 & 1/9 \end{bmatrix}$, a matriz adjunta é $\begin{bmatrix} 1/90 & 1/5 & -1/3 \\ 1/8 & -5/36 & -1/6 \\ -1/12 & -1/15 & 1/9 \end{bmatrix}$, e portanto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj} A = -\frac{540}{43}\begin{bmatrix} 1/90 & 1/5 & -1/3 \\ 1/8 & -5/36 & -1/6 \\ -1/12 & -1/15 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{3}{43}\begin{bmatrix} -2 & -36 & 60 \\ -45/2 & 25 & 30 \\ 15 & 12 & -20 \end{bmatrix}.$$

Grupo III.

(i) Comecemos por fazer operações elementares sobre linhas na matriz ampliada do sistema, de forma a obter uma matriz em escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & | & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & | & c \end{bmatrix} \underset{l_2-2l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & | & b-2a \\ 7 & 1 & 8 & 5 & | & c \end{bmatrix} \underset{l_3-7l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & | & b-2a \\ 0 & -13 & -13 & 26 & | & c-7a \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{9}l_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-\frac{1}{9}l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & -13 & -13 & 26 & | & c-7a \end{bmatrix} \underset{l_3+13l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-7a+\frac{13}{9}(2a-b) \end{bmatrix}.$$

O sistema tem solução se e só se nesta última matriz a última linha só tiver zeros (caso contrário a última linha representa uma equação impossível, ou, justificação alternativa, a característica da matriz do sistema é inferior à característica da matriz aumentada, $2 < 3$).

Resta ver que a equação $c - 7a + \frac{13}{9}(2a - b) = 0$ é equivalente à que é dada no enunciado:

$$c - 7a + \frac{13}{9}(2a-b) = 0 \Leftrightarrow c = 7a - \frac{13}{9}(2a-b) \Leftrightarrow 9c = 63a - 13(2a-b) \Leftrightarrow 9c = 37a + 13b.$$

(ii) Substituindo na matriz anterior a por 2 e b por 4 (e c por $\frac{1}{9}(37\times 2+13\times 4)$, caso contrário o sistema será impossível, como vimos em (i)), ficamos com a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

que representa o sistema, equivalente ao sistema inicial (com $a=2$, $b=4$ e $c=\frac{1}{9}(37\times 2+13\times 4)$),

$$\begin{cases} x+2y+3z-3w=2 \\ y+z-2w=0 \\ 0=0 \end{cases},$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+2(-z+2w)+3z-3w=2 \\ y=-z+2w \end{cases},$$

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x=2-z-w \\ y=-z+2w \end{cases}$$

O conjunto das soluções do sistema é assim $\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \;\text{ tais que }\; x=2-z-w \;\text{ e }\; y=-z+2w\}$.

(Note-se que há várias formas diferentes de representar este conjunto e não é obrigatório escolher z e w como incógnitas livres.)

Grupo IV. Para $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (onde $a,b,c,d\in\mathbb{C}$) temos

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

e

$$(\operatorname{tr} A)A=(a+d)A=\begin{bmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}.$$

Caso a matriz A não seja invertível as duas matrizes acima são iguais, pois nesse caso o determinante de A será zero, ou seja, $ad-bc=0 \Leftrightarrow ad=bc$, e então tem-se $a^2+bc=a^2+ad$ e $bc+d^2=ad+d^2$.

Grupo V. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira coluna ficamos com

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_m \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}=(-1)^{1+(m+1)}\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}=(-1)^m\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Aplicando de novo o Teorema de Laplace à primeira coluna desta última matriz ficamos com

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}=(-1)^m(-1)^m\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Repetindo o processo mais $n-2$ vezes ficamos com $\det\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left((-1)^m\right)^n \det\left[I_m\right] = (-1)^{nm}$.

Portanto temos $\det D_{n,m} = (-1)^{nm}$, ou seja, -1 se n e m são ambos ímpares, 1 nos restantes casos.

(Uma forma alternativa de chegar ao mesmo resultado seria pensar em trocar linhas, que alteram o sinal do determinante, até transformar $D_{n,m}$ em I_{n+m}. Quantas trocas seriam necessárias? Podemos trocar a linha m com todas as que estão por baixo (n trocas), ficando com $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{m-1} & \mathbf{0} \\ I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. A seguir trocamos a linha $m-1$ com as n que estão por baixo (mais n trocas), a seguir a linha $m-2$, etc. até ficarmos com $\begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_m \end{bmatrix}$, que tem determinante 1. No total foram mn trocas de linhas até chegar a uma matriz com determinante 1, pelo que a matriz $D_{n,m}$ tinha determinante $(-1)^{mn}$.)

FIM