

ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve Resolução

Grupo I.

1. Tem-se $CB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 2 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$. As outras alíneas estão erradas, por exemplo $C^2 = C \times C$ não faz sentido

pois uma matriz com 3 colunas só pode ser multiplicada (à direita) por uma matriz com 3 linhas.

2. O subconjunto A de \mathbb{R}^3 é constituído pelos vetores da forma $(x, y, x + y)$, sendo imediato verificar que $(0, 0, 0) \in A$. Consideremos agora u e v , dois elementos de A , ou seja da forma $u = (x, y, x + y)$ e $v = (x', y', x' + y')$. Então $u + v = ((x + x'), (y + y'), (x + x') + (y + y'))$ e portanto $u + v$ pertence a A .

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $\lambda u = \lambda(x, y, x + y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(x + y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y)$, e portanto λu pertence a A . Concluimos então que A é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

O subconjunto B de $\mathbb{R}_3[x]$ é constituído pelos polinómios p de grau menor ou igual a 3 tais que $p(1) = p(4)$. O polinómio nulo, ou seja o polinómio p tal que $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, verifica portanto a condição $p(1) = p(4)$. Consideremos agora p e q , dois elementos de B , ou seja tais que $p(1) = p(4)$ e $q(1) = q(4)$. Por definição de soma de funções tem-se $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ e $(\lambda p)(x) = \lambda(p(x))$. Então $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = p(4) + q(4) = (p + q)(4)$, e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $(\lambda p)(1) = \lambda(p(1)) = \lambda(p(4)) = (\lambda p)(4)$, ou seja $p + q$ e λp ainda estão em B . Concluimos então que B é um subespaço $\mathbb{R}_3[x]$.

O subconjunto C de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é constituído pelas matrizes A que comutam com todas as matrizes de ordem 3. A matriz nula comuta com todas as matrizes pois $0 \cdot X = 0 = X \cdot 0, \forall X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Consideremos agora A e B , duas matrizes de C , ou seja tais que $AX = XA, \forall X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $BX = XB, \forall X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Então $(A + B)X = AX + BX = XA + XB = X(A + B)$ e $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = X(\lambda A), \forall \lambda \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, ou seja $A + B$ e λA ainda estão em C . Concluimos então que C é um subespaço $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

O subconjunto D de \mathbb{R}^4 é constituído pelos vetores (x, y, z, w) de \mathbb{R}^4 cujas componentes satisfazem $x = y + w$ e $z = 2x + w$, ou de forma mais prática $x = y + w$ e $z = 2(y + w) + w = 2y + 3w$. A vantagem é que podemos escrever estes vetores na forma $(y + w, y, 2y + 3w, w)$ usando apenas as variáveis y e w . É imediato verificar que $(0, 0, 0, 0) \in D$. Consideremos agora u e v , dois elementos de D , ou seja da forma $u = (y + w, y, 2y + 3w, w)$ e $v = (y' + w', y', 2y' + 3w', w')$. Então

$$\begin{aligned} u + v &= ((y + w) + (y' + w'), (y + y'), (2y + 3w) + (2y' + 3w'), (w + w')) \\ &= ((y + y') + (w + w'), (y + y'), 2(y + y') + 3(w + w'), (w + w')), \end{aligned}$$

e portanto $u + v$ pertence a D .

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda(y + w, y, 2y + 3w, w) \\ &= (\lambda(y + w), \lambda y, \lambda(2y + 3w), \lambda w) \\ &= (\lambda y + \lambda w, \lambda y, 2(\lambda y) + 3(\lambda w), \lambda w), \end{aligned}$$

e portanto λu pertence a D . Concluimos então que D é um subespaço de \mathbb{R}^4 .

Portanto os 4 conjuntos A, B, C e D são subespaços.

3. Tem-se $\det(-2A^{-1}B^2C^{-1}) = (-2)^3(\det A)^{-1}(\det B)^2(\det C)^{-1} = -8$.

4. Tem-se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \alpha & 9 \end{vmatrix} = 6(\alpha - 8) \neq 0 \iff \alpha \neq 8$, e portanto $\forall \alpha \neq 8$ existe uma única solução. Para $\alpha = 8$ sabemos que o sistema pode ser indeterminado ou impossível.

Temos que $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ e portanto a característica da matriz é igual à característica da matriz aumentada que é 2. Como 2 é menor que 3 (o número de variáveis) o sistema é indeterminado.

Grupo II.

(i) A é invertível pois $\det A = -\frac{43}{540} \neq 0$. Usando transformações elementares sobre linhas obtemos

$$A^{-1} = \frac{3}{43} \begin{bmatrix} -2 & -36 & 60 \\ -45/2 & 25 & 30 \\ 15 & 12 & -20 \end{bmatrix}.$$

(ii) A matriz dos cofatores é $\begin{bmatrix} 1/90 & 1/8 & -1/12 \\ 1/5 & -5/36 & -1/15 \\ -1/3 & -1/6 & 1/9 \end{bmatrix}$, a matriz adjunta é $\begin{bmatrix} 1/90 & 1/5 & -1/3 \\ 1/8 & -5/36 & -1/6 \\ -1/12 & -1/15 & 1/9 \end{bmatrix}$, e portanto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A = -\frac{540}{43} \begin{bmatrix} 1/90 & 1/5 & -1/3 \\ 1/8 & -5/36 & -1/6 \\ -1/12 & -1/15 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{3}{43} \begin{bmatrix} -2 & -36 & 60 \\ -45/2 & 25 & 30 \\ 15 & 12 & -20 \end{bmatrix}.$$

Grupo III.

(i) Começamos por fazer operações elementares sobre linhas na matriz ampliada do sistema, de forma a obter uma matriz em escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & | & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2-2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & | & b-2a \\ 7 & 1 & 8 & 5 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3-7l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & | & b-2a \\ 0 & -13 & -13 & 26 & | & c-7a \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{9}l_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & -13 & -13 & 26 & | & c-7a \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{9}l_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-7a + \frac{13}{9}(2a-b) \end{bmatrix}.$$

O sistema tem solução se e só se nesta última matriz a última linha só tiver zeros (caso contrário a última linha representa uma equação impossível, ou, justificção alternativa, a característica da matriz do sistema é inferior à característica da matriz aumentada, $2 < 3$).

Resta ver que a equação $c - 7a + \frac{13}{9}(2a - b) = 0$ é equivalente à que é dada no enunciado:

$$c - 7a + \frac{13}{9}(2a - b) = 0 \iff c = 7a - \frac{13}{9}(2a - b) \iff 9c = 63a - 13(2a - b) \iff 9c = 37a + 13b.$$

(ii) Substituindo na matriz anterior a por 2 e b por 4 (e c por $\frac{1}{9}(37 \times 2 + 13 \times 4)$, caso contrário o sistema será impossível, como vimos em (i)), ficamos com a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

que representa o sistema, equivalente ao sistema inicial (com $a = 2$, $b = 4$ e $c = \frac{1}{9}(37 \times 2 + 13 \times 4)$),

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3w = 2 \\ y + z - 2w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2(-z + 2w) + 3z - 3w = 2 \\ y = -z + 2w \end{cases},$$

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x = 2 - z - w \\ y = -z + 2w \end{cases}$$

O conjunto das soluções do sistema é assim $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \text{ tais que } x = 2 - z - w \text{ e } y = -z + 2w\}$.

(Note-se que há várias formas diferentes de representar este conjunto e não é obrigatório escolher z e w como incógnitas livres.)

Grupo IV. Para $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$) temos

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

e

$$(\text{tr } A)A = (a + d)A = \begin{bmatrix} (a + d)a & (a + d)b \\ (a + d)c & (a + d)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix}.$$

Caso a matriz A não seja invertível as duas matrizes acima são iguais, pois nesse caso o determinante de A será zero, ou seja, $ad - bc = 0 \Leftrightarrow ad = bc$, e então tem-se $a^2 + bc = a^2 + ad$ e $bc + d^2 = ad + d^2$.

Grupo V. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira coluna ficamos com

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_m \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (-1)^{1+(m+1)} \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (-1)^m \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Aplicando de novo o Teorema de Laplace à primeira coluna desta última matriz ficamos com

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (-1)^m (-1)^m \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_{n-2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Repetindo o processo mais $n - 2$ vezes ficamos com $\det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = ((-1)^m)^n \det [I_m] = (-1)^{nm}$.

Portanto temos $\det D_{n,m} = (-1)^{nm}$, ou seja, -1 se n e m são ambos ímpares, 1 nos restantes casos.

(Uma forma alternativa de chegar ao mesmo resultado seria pensar em trocar linhas, que alteram o sinal do determinante, até transformar $D_{n,m}$ em I_{n+m} . Quantas trocas seriam necessárias? Podemos trocar a linha m com todas as que estão por baixo (n trocas), ficando com

$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{m-1} & \mathbf{0} \\ I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. A seguir trocamos a linha $m - 1$ com as n que estão por baixo (mais n trocas),

a seguir a linha $m - 2$, etc. até ficarmos com $\begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_m \end{bmatrix}$, que tem determinante 1 . No total foram mn trocas de linhas até chegar a uma matriz com determinante 1 , pelo que a matriz $D_{n,m}$ tinha determinante $(-1)^{mn}$.)

FIM