Actividade Formativa 2

Enunciado

---

1. Mostre que para um processo de Poisson $N(t)$ verificam-se os seguintes limites:

$$\lim_{h\to 0} P[N(t+h)-N(t)=1|N(t+h)-N(t)\geq 1]=1$$

e, para qualquer $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$,

$$\lim_{h\to 0} P[N(t+h)-N(t)=k|N(t+h)-N(t)\geq 1]=0.$$

2. Seja $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados um conjunto numerável E e, para cada $j,k\in E$, seja $p_{j,k}(m,n)$ a probabilidade de transição do estado j para o estado k.

2.1. Prove que

$$\sum_{k\in E} p_{j,k}(m,n)=1, \quad \forall\, j\in E.$$

2.2. Fixados $j\in E$ e $m,n\in\mathbb{N}$, considere a aplicação

$$E\supseteq A\mapsto P_{j,m,n}(A):=P[X_n\in A\,|\,X_m=j]=\sum_{k\in A} p_{j,k}(m,n).$$

Mostre que $P_{j,m,n}$ define uma medida de probabilidade sobre E.

3. Dada uma sucessão $\{X_i, i\in\mathbb{N}\}$ de variáveis aleatórias independentes, considere o processo estocástico $\{S_n, n\in\mathbb{N}_0\}$ definido por

$$S_0=0,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Mostre que o processo $\{S_n, n\in\mathbb{N}_0\}$, que representa um passeio aleatório com início em 0, é uma cadeia de Markov.

4. Uma vila tem dois supermercados, A e B. Cada pessoa residente nessa vila faz semanalmente compras, optando por qualquer um destes dois supermercados com igual probabilidade. Utilize o modelo do exercício anterior para responder às seguintes questões:

4.1. Supondo que, no início da observação, uma pessoa tinha ido 5 semanas fazer compras ao supermercado A, qual será a probabilidade de, até à n-ésima semana, ter ido j semanas fazer compras ao mesmo supermercado?

4.2. Supondo que, no início da observação, uma pessoa tinha ido 4 vezes ao supermercado A fazer as suas compras, qual a probabilidade de nunca mais lá voltar para fazer compras?

5. Considere uma cadeia de Markov homogénea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ e matriz de probabilidade de transição a um passo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 3/5 & 1/15 \end{bmatrix}$$

5.1. Divida o espaço de estados em classes comunicantes e classifique-as.

5.2. Identifique, caso exista(m), o(s) estado(s) ergódico(s).