Resolução do efólio A

ÁLGEBRA LINEAR I **Código:** 21002

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo.

1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ considere os seguintes subconjuntos:

(i) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_4\}$,
(ii) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 x_4 = 0\}$,
(iii) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
(iv) $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon 4x_4 = 3x_3\}$.

Então:

☒ **a)** Os conjuntos A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
☐ **b)** Nenhum dos conjuntos A, B, C e D é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
☐ **c)** Só os conjuntos A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
☐ **d)** Só o conjunto C é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

2. Considere as matrizes A e B definidas por $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Então

☒ **a)** $\det AB = 0$ ☐ **c)** $\det 3A = 3$

☐ **b)** $\det B^{-1}A = 6$ ☐ **d)** $\det 4B = 4$

3. Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Então

☐ **a)** $\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ **c)** $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} M) = 3M$

☐ **b)** $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ ☐ **d)** $M^2 = M$

4. Para $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ considere o seguinte sistema de 3 equações lineares nas incógnitas reais x, y e z

$$\begin{cases} -x-(\alpha-1)y+z=-1 \\ -x-y+\alpha z=\beta \\ \ \ x+y-z=1. \end{cases} \tag{1}$$

Então ~~o sistema (1)~~

- ☐ **a)** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ o sistema (1) tem solução.
- ☐ **b)** se $(\alpha,\beta)=(0,0)$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ é solução do sistema (1).
- ☐ **c)** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ não existe solução do sistema (1).
- ☒ **d)** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ não é solução do sistema (1).

II. (i) Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine se a matriz

$$R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$$

é invertível, e no caso afirmativo calcule R^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[R|I_4]$.

(ii) Utilizando a alínea anterior resolva a equação $RX=B$ onde $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

III. Seja $N\in\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por $N=\begin{pmatrix}x&y&z&w\\-y&x&w&-z\\-z&-w&x&y\\-w&z&-y&x\end{pmatrix}$.

(i) Mostre que $\det N=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2$.
(*Sugestão: Considere a matriz* $NN^\top$.)

(ii) Mostre que $\det N=0 \iff N=0$.

IV. Por definição o gráfico de uma função real de variável real f é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ constituído pelos pontos da forma $(x,f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

Supondo que f é um polinómio de grau 3 da forma $f(x)=ax^3+bx^2+c$ determine coeficientes reais a,b e c tais que os pontos $(0,1),(1,2)$ e $(2,3)$ pertençam ao gráfico de f.

V. Sejam $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas. Será que AB é necessariamente simétrica? Justifique a sua resposta.

VI. Dadas matrizes $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $2A^\top B=I_n$, mostre que A,B e B^2 são invertíveis e indique as respetivas inversas.

FIM

Grupo I.

1.

Apenas o conjunto B não era um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Bastava ver, por exemplo, que a soma de dois elementos de B podia não pertencer a B. Por exemplo $(1,0,0,0) \in B$ e $(0,0,0,1) \in B$ mas $(1,0,0,0)+(0,0,0,1) = (1,0,0,1) \notin B$ pois $1 \times 1 = 1 \neq 0$.

Os conjuntos A e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3 e C é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 1.

A alínea correta é **a)**

2.

Tem-se $\det A = 0$ e portanto $\det AB = \det A \det B = 0$, $\det 3A = 3^3 \det A = 0$ e $\det B^{-1}A = \det B^{-1} \det A = 0$.

Por outro lado $\det 4B = 4^3 \det B = 4^3 \times 1 \times 2 \times 3 \neq 4$.

Assim a alínea correta é **a)**.

3.

Tem-se $\det M = 1 \times 1 \times 3 = 3$, e como M é uma matriz quadrada de ordem 3, $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} M) = (\det A)^{3-2}A = 3A$. Facilmente se via que as outras alíneas estavam erradas.

A alínea correta é **c)**.

4.

Era possível resolver o sistema, mas era mais simples verificar a alínea **d)** pois substituindo (x,y,z) por $(0,0,0)$ obtínhamos o sistema $\begin{cases} 0 = -1 \\ 0 = \beta \\ 0 = 1 \end{cases}$, que é claramente impossível.

A alínea correta é **d)**.

Grupo II.

Usando a notação habitual tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_3-\ell_1 \\ \ell_4-5\ell_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 8 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_3-2\ell_2 \\ \ell_4-6\ell_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}\ell_3 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\ell_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/4 & 6/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2-\ell_4 \\ \ell_3+\frac{1}{2}\ell_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1-\ell_3 \\ \ell_2-\ell_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Concluimos então que a matriz R é invertível e que a sua inversa é dada por

$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto

$$X = R^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Grupo III.
Para este grupo vamos usar as seguintes propriedades

1. $\det N = \det N^\top$,
2. $\det NN^\top = \det N \det N^\top = \det N \det N = (\det N)^2$ e portanto $\det N = \pm\sqrt{\det NN^\top}$.

Calculando o produto $NN^\top$ obtemos uma matriz escalar (ou seja uma matriz diagonal com os elementos da diagonal todos iguais) $NN^\top = (x^2+y^2+z^2+w^2)I_4$ e portanto concluímos que $\det NN^\top = (x^2+y^2+z^2+w^2)^4$ e finalmente

$$\det N = \pm\sqrt{(x^2+y^2+z^2+w^2)^4} = \pm(x^2+y^2+z^2+w^2)^2.$$

Para escolhermos o sinal basta reparar que o coeficiente de x^4 no determinante de N é $+1$, e portanto devemos escolher o sinal "+", ou seja $\det N = (x^2+y^2+z^2+w^2)^2$. Repare-se que não é necessário calcular o determinante para determinar o coeficiente de x^4

Na alínea **b)** era necessário verificar que $\det N = 0 \Rightarrow N = 0$ e que $N = 0 \Rightarrow \det N = 0$. A 2ª implicação pode ser resolvida de várias formas, por exemplo usando o facto de a matriz nula não ser invertível, o que é equivalente ao seu determinante ser nulo.

Se $\det N = 0$ então $(x^2+y^2+z^2+w^2)^2 = 0$ e portanto $x^2+y^2+z^2+w^2 = 0$. Como cada um dos termos da soma é maior ou igual a zero, a sua soma só será nula se cada um deles for igual a zero, ou seja se $x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 0$ o que equivale a $x = y = z = w = 0$ ou ainda $N = 0$.

Grupo IV.
Substituindo na expressão de $f(x)$ o valor de x por $0, 1$ e 2 obtem-se

$$\begin{aligned}1 &= f(0) = a0^3 + b0^2 + c = c\\ 2 &= f(1) = a1^3 + b1^2 + c = a + b + c\\ 3 &= f(2) = a2^3 + b2^2 + c = 8a + 4b + c,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}1 &= c\\ 2 &= a + b + c\\ 3 &= 8a + 4b + c.\end{aligned}$$

A primeira equação dá-nos o valor de c e por substituição nas outras 2 equações obtemos um sistema com 2 equações e duas incógnitas que tem uma única solução $(a, b) = (-1/2, 3/2)$ e portanto existe um único polinómio da forma $ax^3 + bx^2 + c$ que passa nos 3 pontos dados,

$$f(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + 1.$$

Grupo V.
A resposta é não. Um contra-exemplo simples é o seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Neste caso $AB \neq (AB)^\top$, tendo-se $AB = (BA)^\top$.

Mais geralmente se A e B são simétricas,

$$AB = (AB)^\top \iff AB = B^\top A^\top = BA,$$

e portanto a matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$, ou seja se as matrizes A e B comutam.

Grupo VI.

Vamos começar por provar que as matrizes são invertíeis e depois vamos calcular as inversas.

Como $2A^\top B = I_n$ temos que $\det(2A^\top B) = \det I_n = 1$, e portanto

$$\det A \det B = \frac{1}{2^n} \neq 0.$$

Esta igualdade permite-nos concluir que os determinantes de A e de B são não-nulos e portanto que A e B são invertíveis, e se B for invertível também B^2 é invertível e $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$.

Uma vez que já sabemos que B é invertível podemos concluir, por definição de inversa, que $2A^\top = B^{-1}$, e portanto que

$$(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2 = (2A^\top)^2 = 4(A^\top)^2 = 4(A^2)^\top.$$

Finalmente a inversa de A é obtida de modo semelhante

$$\begin{aligned} 2A^\top = B^{-1} &\Rightarrow (A^\top)^{-1} = \left(\frac{1}{2}B^{-1}\right)^{-1} \\ &\Rightarrow (A^{-1})^\top = 2B \\ &\Rightarrow A^{-1} = 2B^\top. \end{aligned}$$

FIM