E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Equações Diferenciais

CÓDIGO: 21164

DOCENTE: Sandra Ferreira

A preencher pelo estudante

NOME: Kevin B. Tembe

N.º DE ESTUDANTE: 2100530

CURSO: Licenciatura em Matemática e Aplicações

DATA DE ENTREGA: 12 de Dezembro de 2022

UNIVERSIDADE ABERTA

21664 — Equações Diferenciais

E-fólio B

12 de Dezembro de 2022

Kevin B. Tembe

2100530@estudante.uab.pt

Resolução

1. A equação diferencial ordinária (EDO) é linear de 2ª ordem homogénea com coeficientes constantes pelo que analisando o seu significado e embora para certos valores em $\mathbb{R}$, as funções trigonométricas pudessem ser candidatas, as soluções mais abrangentes são as da forma $y = ce^{rt}$. Observe-se que $y' = cre^{rt}$ e $y'' = cr^2e^{rt}$ e substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} & y'' + 2y' + y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & cr^2e^{rt} + 2cre^{rt} + 2ce^{rt} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r^2 + 2r + 2)ce^{rt} = 0 \end{aligned}$$

Se $ce^{rt} \neq 0$, então $r^2 + 2r + 2 = 0$. A última expressão é a equação característica de uma EDO linear, cujas raízes complexas são $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Assim,

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^{(-1+i)t} \\ y_2 = c_2e^{(-1-i)t} \end{cases}$$

cuja combinação linear compõe todas as soluções de y,

$$y = y_1 + y_2 = e^{-t}(c_1e^{it} - c_2e^{-it})$$

Para facilitar a resolução do problema de valor inicial $\left(y(\frac{\pi}{4}) = 2,\ y'(\frac{\pi}{4}) = -2\right)$, recorremos à fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

para reescrever,

$$y = e^{-t}(c_3 \cos t + c_4 \sin t)$$

com $c_3 = c_1 - c_2$ e $c_4 = i(c_1 + c_2)$. Também é possível determinar a sua derivada y',

$$y' = e^{-t}(-c_3(\cos t + \sin t) - c_4(\sin t - \cos t))$$

Tomando $t = \frac{\pi}{4}$ e sabendo que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\begin{cases} y(\frac{\pi}{4}) = 2 \\ y'(\frac{\pi}{4}) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\frac{\pi}{4}}(c_3\frac{\sqrt{2}}{2} + c_4\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 \\ e^{-\frac{\pi}{4}}(-c_3(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - c_4(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} \\ c_4 = e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} \end{cases}$$

reescrevemos y como,

$$y = e^{-t}(e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos t + e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\sin t)$$

e chegamos à solução do problema de valor inicial que é única de acordo com o Teorema de Existência e Unicidade,

$$y(t) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t + \sin t}{e^t}$$

e à expressão da sua derivada y',

$$y'(t) = -2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{e^t}$$

Analisando a expressão de y e y' podemos inferir sobre a existência de zeros e a monotonia, fazendo as seguintes observações:

- A função y sendo o produto entre uma função exponencial ($e^{-t} > 0$) e outra sinusoidal ($\cos t + \sin t$ é igualmente sinusoidal, periódica de contradomínio $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$) é contínua em todo o seu domínio, de classe C^1 e admite zeros na forma $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função derivada y' admite zeros na forma $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, entre zeros a função é estritamente crescente e estritamente decrescente conforme o sinal de $\sin t$, o que prova o comportamento sinusoidal da função y.
- Uma vez que o fator sinusoidal está sempre compreendido entre $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, devido ao fator exponencial, à medida que t aumenta a diferença entre os máximos e mínimos locais de y diminui e no sentido oposto, à medida que t diminui essa diferença é cada vez maior.
- Consequentemente, $t \to +\infty$, $y \to 0$, pois o fator exponencial "obriga"y a aproximar-se de zero. Em sentido inverso, quando $t \to +\infty$, o valor é indeterminado (ind.), pois apesar de aparentar $y \to \infty$ devido ao fator exponencial não nos esqueçamos que y é contínua com uma infinidade de zeros periódicos.

Assim, tomando valores de interesse para t, construímos a tabela,

t	$y(t)$	$y'(t)$
$-\infty$	ind.	ind.
-2π	$\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$	0
$-\frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}e-2\pi$	$-2e^{2\pi}$
$-\frac{5\pi}{4}$	0	$-2e^{3\frac{\pi}{2}}$
$-\pi$	$-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$	0
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}e^{\pi}$	$2e^{\pi}$
$-\frac{\pi}{4}$	0	$2e^{\frac{\pi}{2}}$
0	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	0
$\frac{\pi}{4}$	2	-2
$\frac{3\pi}{4}$	0	$-2e^{-\frac{\pi}{2}}$
π	$-\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}e^{-\pi}$	$2e^{-\pi}$
$\frac{7\pi}{4}$	0	$2e^{-\frac{3\pi}{2}}$
2π	$\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$	0
$+\infty$	0	0

com a qual podemos esboçar o gráfico de y,

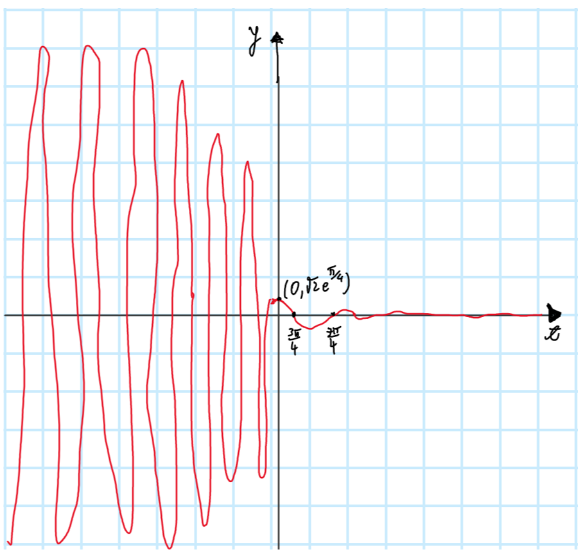

Figura 1: Esboço do gráfico de y(t).

Nota: Não obstante ter-se encontrado a solução do problema de valor inicial, façamos algumas observações. Presume-se a semelhança entre o estudo da diferenciação e continuidade de funções complexas e reais e o facto de ter-se operado sobre um contradomínio em $\mathbb{C}$ para a determinação de soluções reais invalida o resultado, considerando-se o espaço complexo como "um meio para atingir o objetivo". Com efeito, se a equação diferencial é definida em $\mathbb{R}$ as soluções também devem logicamente o ser no mesmo espaço e pode-se, por conseguinte, desconsiderar o valor exato das variáveis c_1 e c_2 e por estranho que possa parecer a soma e a subtração entre as mesmas produz um número real.

2. De acordo com a 2ª lei de Kirchoff, num circuito elétrico fechado, a tensão aplicada é igual à diferença de potencial elétrico U em todos os pontos do circuito. Considere-se:

- As grandezas físicas medidas nas unidades do Sistema Internacional (SI): a capacitância C em farad, a resistência R em ohm, a indutância L em henry, a intensidade I em A (ampere), a quantidade de carga Q em C (couloumb), a tensão U em V (volt) e o tempo t em s (segundos).
- A intensidade da corrente é uma medida da quantidade de cargas atravessadas por unidade de tempo e $I = \frac{dI}{dt}$.
- O resístor segue a lei de Ohm, pelo que, $U = RI$.
- O capacitor segue a relação, $U = \frac{Q}{C}$.
- O indutor segue a relação, $U = L\frac{dI}{dt}$.
- A quantidade de cargas antes ligar o circuito é nula ($Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$).
- Despreza-se qualquer natureza resistiva, capacitora ou indutora do fio do condutor.

Constrói-se a equação diferencial,

$$\begin{aligned} & L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U(t) \\ \Leftrightarrow \quad & L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U(t) \end{aligned}$$

Segundo a informação sobre os componentes do circuito, $C = 0.25 \times 10^{-6}$, $R = 5000$, $I = 1$ e $U(t) = 12$, e a EDO que modela o circuito é

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 5000\frac{dQ}{dt} + 4 \times 10^6 Q = 12$$

sendo linear de 2ª ordem não-homogénea com coeficientes constantes. Considerando a equação apenas na sua forma homógenea, presume-se que as soluções são da forma exponencial ce^{rt} e a partir das suas derivadas, resulta na equação característica $r^2+5000r+4\times10^6=0$, cujas soluções reais são $r_1=-1000$ e $r_2=-4000$ e com as quais encontra-se a solução complementar q_c,

$$q_c(t)=c_1e^{-1000t}+c_2e^{-4000t}$$

Uma vez que a parcela não-homogénea $g(t)=3$ pode ser considerada como um polinómio de grau zero $\varphi(t)=A$, recorre-se ao Método dos Coeficientes Indeterminados para a determinação da solução particular $\varphi(t)$. Note-se que $q'(t)=0$ e $q''(t)=0$, pelo que substituindo na equação diferencial conduz a $A=3\times10^{-6}$, e por conseguinte, $\varphi(t)=3\times10^{-6}$. Assim, para a quantidade $Q(t)$ e para a quantidade marginal $Q'(t)$ tem-se,

$$\begin{aligned} Q(t)&=q_c(t)+\varphi(t)=c_1e^{-1000t}+c_2e^{-4000t}+3\times10^{-6}\\ Q'(t)&=-1000c_1e^{-1000t}-4000c_2e^{-4000t}\end{aligned}$$

cujas constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas pelo problema de solução inicial, da seguinte forma,

$$\begin{cases}Q(0)=0\\ Q'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+c_2+3\times10^{-6}=0\\ -1000c_1-4000c_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=-4\times10^{-6}\\ c_2=1\times10^{-6}\end{cases}$$

Reescreve-se y e y',

$$\begin{aligned} Q(t)&=(-4\times10^{-6})e^{-1000t}+(1\times10^{-6})e^{-4000t}+3\times10^{-6}\\ Q'(t)&=0.004e^{-1000t}-0.004e^{-4000t}\end{aligned}$$

e responde-se ao é pedido:

- No instante $t=0,001s$ tem-se a quantidade $Q\approx1.5468\times10^{-6}$.
- No instante $t=0,01s$ tem-se a quantidade $Q\approx2.9998\times10^{-6}$.
- E a carga limite, isto é o valor máximo de carga que consegue passar neste circuito elétrico com esta configuração e sem interferências externas é de $Q=3\times10^{-6}(A)$. Note-se que no limite $t\to+\infty$ as duas primeiras parcelas são nulas.

3. Observe-se que a EDO é linear de 3ª ordem não-homogénea com coeficientes constantes, pelo que focando na sua forma homogénea e presume-se que as soluções são da forma exponencial ce^{rt}. Da sua equação característica, deduz-se,

$$r^3 - 2r^2 - 21 - 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (r-6)(r+1)(r+3) = 0$$
$$r_1 = 6 \quad \wedge \quad r_2 = -1 \quad \wedge \quad r_3 = -3$$

e a solução complementar y_c,

$$y_c(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}$$

Uma vez que o termo não-homogéneo $g(t)$ é composto por duas funções $g_1(t)$ e $g_2(t)$ de diferentes famílias, uma polinomial e outra exponencial, recorre-se aos teoremas que afirmam que cada uma destas funções originará um subproblema único, Y_1 e Y_2, cuja soma é a solução particular $Y(t)$. Assim, tome-se,

$$g_1(t) = 3$$
$$g_2(t) = 4e^{-t}$$

Recorre-se ao Método dos Coeficientes Indeterminados. Começando por g_1, sendo polinomial, e como as suas derivadas são nulas, em semelhança ao Exercício 2, a determinação da constante A resulta em $Y_1(t) = -6$. Relativamente a g_2, sendo exponencial, presume-se que a solução particular também é da mesma família Ae^{-t}, no entanto, como não pode haver duplicação, uma vez que c_2e^{-t} já é uma solução da equação homogénea, a estratégia passa por multiplicar por um fator t, conduzindo a $Y_2(t) = Ate^{-t}$. Assim tem-se,

- $Y_2(t) = Ate^{-t}$
- $Y_2'(t) = A(e^{-t} - te^{-t})$
- $Y_2''(t) = A(-2e^{-t} + te^{-t})$
- $Y_2'''(t) = A(3e^{-t} - te^{-t})$

Substituindo os resultados anteriores na equação diferencial,

$$y''' - 2y'' - 21y' - 18y = 4e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow \quad A(3e^{-t} - te^{-t}) - 2A(-2e^{-t} + te^{-t}) - 21A(e^{-t} - te^{-t}) - 18Ate^{-t} = 4e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{2}{7}$$

a solução particular é,

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) = -\frac{2}{7}te^{-t} - 6$$

e as soluções da EDO são da forma,

$$y(t) = y_c(t) + Y(t) = c_1e^{-6t} + c_2e^{-t} + c_3^{-3t} - \frac{2}{7}te^{-t} - 6, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

FIM