Álgebra Linear II | 21003

Proposta de resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão.

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos.

Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nas submissões dos alunos.

1. (2 valores) Considere a seguinte matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine o polinómio característico de A; os valores próprios de A, e suas multiplicidades algébricas e geométricas; J, a forma canónica de Jordan da matriz A; e uma matriz invertível Q tal que $J = Q^{-1}AQ$.

Resolução: Calculemos o polinómio característico da matriz A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2((1-\lambda)(3-\lambda)+1) = (2-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda+4) = (2-\lambda)^4.$$

Logo, o valor próprio único da matriz é a solução da equação $p_A(\lambda) = 0$, isto é $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica ma$(2) = 4$. Vamos agora calcular a multiplicidade geométrica de 2.

$$A - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A primeira, segunda e quarta linha são todas múltiplas uma da outra, enquanto a terceira linha claramente não é um múltiplo das outras. Por isso rank$(A) = 2$ e logo mg$(2) = 4-$rank$(A - 2I_4) = 4 - 2 = 2$.

Atendendo às multiplicidades algébrica e geométrica sabemos que a matriz de Jordan J que procuramos é constituida por dois blocos. Temos duas possibilidades: um tem dimensão 1 e o outro dimensão 3; ou ambos tem dimensão 2.

Temos

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{4\times 4}.$$

Portanto, a dimensão do maior bloco de Jordan é igual a 2 e obtemos

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para obter a matriz Q precisamos de calucular os vectores próprios e vectores próprios generalizados associados ao valor próprio 2.

Considere $E_2(A)$. Seja $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. Temos

$E_2 = \{x \in \mathbb{C}^4 : (A - 2I_4)x = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 = -x_2, -x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 = x_4 = -x_2\}$

$= \{[x_4, -x_4, x_3, x_4]^T : x_3, x_5 \in \mathbb{C}\} = \langle [1, -1, 0, 1]^T, [0, 0, 1, 0]^T \rangle.$

Para iniciar nossa primeira cadeia, encontremos uma resolução de $(A - 2I_4)v = [1, -1, 0, 1]^T$. Isso pode ser feito por eliminação padrão. No entanto, a resolução $v = [-1, 0, 0, 1]$ é fácil de detectar por inspeção.

Para iniciar nossa segunda cadeia, encontremos uma resolução de $(A - 2I_4)w = [0, 0, 1, 0]^T$. Mais uma vez, é fácil de detectar a resolução simples $w = [0, 0, 0, -1]^T$.

Juntando, obtemos a matriz de semelhança Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(Existem muitas outras soluções corretas para Q)

2. (1 valor) Seja $J \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ uma forma canónica de Jordan com valor próprio 0, tal que ma$(0) = 6$ e mg$(0) = 2$. Suponha que J tenha um vetor próprio generalizado v de ordem 4.

Com justificação, encontre todas as matrizes J que satisfazem as propriedades dadas.

Resolução: Porque ma$(0) = 6 = \dim \mathbb{R}^6$, 0 é o único vetor próprio de J. Portanto, todos blocos de Jordan de J têm a forma $J_k(0)$ para alguns k.

Porque mg$(0) = 2$, J tem dois blocos de Jordan $J_k(0)$ e $J_{k'}(0)$. Além disso, $k + k' = 6$. Isso resulta em 5 oções para J.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos verificar quais dessas matrizes têm um vetor próprio generalizado de ordem 4. Seja $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ a base canónica de $\mathbb{R}^6$. Então

$$(J_1 - 0I_6)^3 e_5 = J_1^3 e_5 = J_1^2 e_4 = J_1 e_3 = e_2 \neq 0$$

e

$$(J_1 - 0I_6)^4 e_5 = J_1^4 e_5 = J_1(J_1^3 e_5) = J_1 e_2 = 0.$$

Portanto e_4 é um vetor próprio generalizado de ordem 4 de J_1. Similarmente

$$(J_2 - 0I_6)^3 e_6 = e_3 \neq 0, (J_2 - 0I_6)^4 e_6 = 0,$$
$$(J_4 - 0I_6)^3 e_4 = e_1 \neq 0, (J_4 - 0I_6)^4 e_4 = 0,$$
$$(J_5 - 0I_6)^3 e_4 = e_1 \neq 0, (J_4 - 0I_6)^4 e_4 = 0.$$

Portanto, $J_2, J_4,$ e J_5 têm um vetor próprio generalizado de ordem 4.

Considere J_3. Temos

$$(J_3 - 0I_6)^3 = J_3^3 = J_3 J_3^2 = J_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{6\times 6}$$

Portanto $(J_3 - 0I_6)^3 v = 0_{6\times 1}$ para todos $v \in \mathbb{R}^6$ e J_3 não tem um vetor próprio generalizado de ordem 4.

Em conclusão, J é uma das matrices J_1, J_2, J_4, J_5.

3. (1 valor) Considere a aplicação $\cdot|\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$z|w = \bar{z}w.$$

Quais dos axiomas A1, A2, A3, e A4 (Def. 2.10) são validos para a aplicação $\cdot|\cdot$?

Resolução: A1: Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, w = x' + y' i \in \mathbb{C}$, $x_1, y_1, x_2, y_2, x', y' \in \mathbb{R}$. Então

$(z_1 + z_2)|w = (\overline{z_1 + z_2})w = (\overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)})w$

$= (\overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i})w$

$= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i)w$

$= ((x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i))w$

$= (x_1 - y_1 i)w + (x_2 - y_2 i)w$

$= \overline{z_1}w + \overline{z_2}w = z_1|w + z_2|w$

Pois, axioma A1 é valida.

A2: Se $\alpha = i, z = w = 1$, temos

$(\alpha z)|w = (i \cdot 1)|1 = i|1 = \bar{i} \cdot 1 = \bar{i} = -i$

mas $\alpha(w|z) = i(1|1) = i(\bar{1} \cdot 1) = i(1 \cdot 1) = i \cdot 1 = i$.

Logo, axioma A2 não é valida.

A3: Sejam $z = x + yi, w = x' + y'i \in \mathbb{C}$, $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Então

$z|w = \bar{z}w = (x - yi)(x' + y'i) = xx' + yy' + (xy' - yx')i$

e

$w|z = \bar{w}z = (x' - y'i)(x + yi) = xx' + yy' + (-xy' + yx')i = xx' + yy' - (xy' - yx')i$

Portanto, $z|w = \overline{w|z}$, e A3 é valida.

A4: Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$z|z = \bar{z}z = (x - yi)(x + yi) = x^2 + y^2 + (xy - yx)i = x^2 + y^2 \geq 0$.

Além disso, $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0$.

Poartanto, axioma A4 é valida.

FIM