E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Matemática Finita

CÓDIGO: 21082

DOCENTE: Maria João Oliveira

A preencher pelo estudante

NOME: Cátia Sofia Neto Rebelo Ferreira dos Santos

N.º DE ESTUDANTE: 1702194

CURSO: Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 14/04/2024

1 → D

2 → D

3 → D

* conjunto que contém pelo menos um algarismo i

4 Se considerarmos T o conjunto de distribuição de algarismos sem restrições, temos que $\#T = 4^8$ e A_i* ($i = 1, 2, 3, 4$), para saber quantos algarismos podemos construir de modo a que cada um deles apareça pelo menos uma vez é dada por $\#T - (\#\bar{A}_1 \cup \#\bar{A}_2 \cup \#\bar{A}_3 \cup \#\bar{A}_4)$. Optei neste caso por $\#\bar{A}_i$, ou seja, quantas vezes i não aparece, porque o número de opções é mais simples para os cálculos do princípio de inclusão-exclusão.

$\#T = 4^8 = 65536$ (Arranjos com repetição)

$\#\bar{A}_1 = \#\bar{A}_2 = \#\bar{A}_3 = \#\bar{A}_4 = 3^8 = 6561$ (Arranjos com repetição)

$$\#\bar{A}_1 \cup \#\bar{A}_2 \cup \#\bar{A}_3 \cup \#\bar{A}_4 = \#\bar{A}_1 + \#\bar{A}_2 + \#\bar{A}3 + \#\bar{A}4$$
$$- (\#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_2 + \#A_1 \cap \#\bar{A}_3 + \#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_4 + \#\bar{A}_2 \cap \#\bar{A}_3 + \#\bar{A}_2 \cap \#\bar{A}_4 + \#\bar{A}_3 \cap \#\bar{A}_4)$$
$$+ (\#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_2 + \cap\#\bar{A}_3) + (\#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_2 \cap \#\bar{A}_4) + (\#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_3 \cap \#\bar{A}_4) + (\#\bar{A}_2 \cap \#\bar{A}_3 \cap \#\bar{A}_4)$$
$$- (\#\bar{A}_1 \cap \#\bar{A}_2 \cap \#\bar{A}_3 \cap \#\bar{A}_4)$$
$$= 4 \times (3^8) - 6 \times (2^8) + 4 \times (1^8) - 0 = 24712$$

$$\#T - (\#\bar{A}_1 \cup \#\bar{A}_2 \cup \#\bar{A}_3 \cup \#\bar{A}_4) = 65536 - 24712 = 40824$$

Deste modo, a solução do estudante não contempla todas as maneiras que os algarismos podem ser dispostos.

5 5.1) Para o método de indução matemática, começamos por comprovar o caso base, $n=1$:

Caso base $n = 1$

$$\binom{1+1}{2} + \binom{1}{2} = 1^2 \iff \binom{2}{2} + \overset{\text{por convenção}}{0} = 1 \iff 1 = 1$$

c.q.d

A seguir procedemos com o passo de indução para $n+1$, tal que

Hipótese de indução $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$

Tese de indução $\binom{n+1+1}{2} + \binom{n+1}{2} = (n+1)^2 \iff \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} = (n+1)^2$

Seguido então da demonstração:

$\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} =$ pela lei de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\binom{n+2-1}{2}\binom{n+2-1}{2-1} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} =$ aplicando novamente

$\binom{n}{2} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} + \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{n+1} + \binom{n+1}{2} =$ reorganizando e substituindo

$$\underbrace{\binom{m+1}{2}+\binom{m}{2}} + m + m+1 =$$ por hipótese de indução

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \text{ c.q.d}$$

CA: $(m+1)^2 = (m+1)(m+1)$
$= m^2 + m + m + 1 =$
$= m^2 + 2m + 1$

Provando a nossa tese de indução

S.2) Começamos por aplicar a propriedade distributiva e repartir os somatórios:

$$\sum_{k=0}^{m} (k+m)(k-m) = \sum_{k=0}^{m} k^2 - m^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 - \underbrace{\sum_{k=0}^{m}}_{m+1} m^2 = \sum_{k=0}^{m} k^2 - (m+1)m^2 = \sum_{k=0}^{m} k^2 - (m^3 + m^2) =$$

utilizando agora a resposta do ex anterior (S.1)

$$n^2 = \binom{n+1}{2}\binom{n}{2} \quad n \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{m} \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} - m^3 - m^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{k+1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \binom{k}{2} - m^3 - m^2 =$$

olhando para as igualdades binomiais, penso que a que se encaixa aqui é a adição do índice superior mas para aplicar temos de efectuar uma mudança de variável

$j = k+1$
$k = 1 \Rightarrow j = 2$
$k = m \Rightarrow j = m+1$

$$\sum_{j=2}^{m+1} \binom{j}{2} + \underbrace{0}_{\substack{\text{para } k=1 \\ \text{por convenção}}} + \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{2} - m^3 - m^2 =$$

$$\binom{m+1+1}{2+1} + \binom{m+1}{2+1} - m^3 - m^2 =$$

$$\binom{m+2}{3} + \binom{m+1}{3} - m^3 - m^2 =$$

expandindo os coeficientes binomiais e substituindo

$$\binom{m+2}{3} = \frac{(m+2)(m+1)m}{3!} = \frac{(m+2)(m+1)m}{6}$$

$$\binom{m+1}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{3!} = \frac{(m+1)m(m+1)}{6}$$

$$\frac{(m+2)(m+1)m}{6} + \frac{(m+1)m(m-1)}{6} - m^3 - m^2 =$$

$$\frac{(m+2)(m+1)m + (m+1)m(m-1) - 6m^3 - 6m^2}{6} =$$

$$\frac{m^3 + 3m^2 + 2m + m^3 + m^2 - m - 6m^3 - 6m^2}{6} =$$

$$\frac{-4m^3 - 2m^2 + m}{6}$$ usando igualdades binomiais

⑥

6.1) Para uma funçaõ ser bijectiva, tem de ser obrigatoriamente

- injectiva, a cada elemento do domínio corresponde imagens diferentes do contradomínio, tal que

$$f : [n] \longrightarrow [n]$$

$$x_1 \longrightarrow f(x_1) \qquad x_1 \neq x_2$$

$$x_2 \longrightarrow f(x_2) \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

- sobrejectiva, para cada elemento do contradomínio corresponde pelo menos um elemento do domínio

Neste caso, podemos considerar entaõ $n!$ funçoẽs distintas, visto ser o número que representa as permutaçoẽs possíveis, é válido ao excluirmos o zero.

Exemplo para $n = 2$

$f_1(1) = 1$, $f_1(2) = 2$ Permutaçoẽs do conjunto $\{1,2\}$

$f_2(2) = 2$, $f_2(1) = 1$ $2 = 2!$

6.2) Como explicado acima, para um funçaõ ser bijectiva, tem de ser sobrejectiva e injectiva. Pelo enunciado, sabemos que f é sempre sobrejectiva, logo queremos saber na verdade, quantas funçoẽs injectivas f se podem definir.

Quando temos $[n] \longrightarrow [m]$, que nos diz que $m \geq n$ (ou temos conjuntos vazios), logo podemos dizer que $\#[n] = n \leq \#[m]$

$$\underline{m} \times \underline{(m+1)} \times \underline{(m+2)} \times \underline{(\cdots)} \times \underline{m-n+1} = \frac{m!}{m-n!} = m^{\underline{n}}$$

Termos entaõ n posiçoẽs por preencher de n a $m-n+1$, que saõ $\frac{m!}{m-n!} = m^{\underline{n}}$. Ou seja existem $m^{\underline{n}}$ funçoẽs F bijectivas.