

E-Fólio B - Resolução

1. Prove por indução, que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Começamos por estudar o caso $n = 1$ para o qual temos

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

pelo que o caso $n = 0$ conduz a uma proposição verdadeira. Vamos agora assumir que, para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (1)$$

e pretendemos provar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

e usando a hipótese de indução (1), temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

como pretendíamos provar.

2. Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

- (a) Determine o domínio de f .

A função f pode ser definida como a divisão $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x) = x^2 - 3$ e $h(x) = x - 2$ são ambas funções polinomiais, portanto $D_g = D_h = \mathbb{R}$. Então

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g, x \in D_h \text{ e } h(x) \neq 0\}$$

Temos

$$h(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2,$$

logo

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

(b) Estude a existência de assíntotas ao gráfico de f .

f é contínua no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pelo que o único ponto onde poderão ocorrer assíntotas verticais é o ponto $x = 2$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

logo $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f . Estudemos a existência de assíntotas horizontais e oblíquas. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-3}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x^2-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1, \end{aligned}$$

pelo que $m = 1$. Estudamos agora o

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3-x(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right) = 2, \end{aligned}$$

logo $b = 2$ e a recta $y = x + 2$ é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$. Da mesma forma, quando $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{x^2-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1, \end{aligned}$$

pelo que $m = 1$. Estudamos agora o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-3-x(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right) = 2, \end{aligned}$$

logo $b = 2$ e a recta $y = x + 2$ também é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

Uma resolução alternativa (e envolvendo menos cálculos) seria notar que

$$x^2 - 3 = (x^2 - 4) + 1 = (x - 2)(x + 2) + 1,$$

pelo que, para $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2}.$$

Então

$$f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 2},$$

pelo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

e $y = x + 2$ é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$ e também quando $x \rightarrow +\infty$.

(c) Prove que f é duas vezes diferenciável no seu domínio e calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

Tal como foi indicado na alínea anterior, f é definida como a divisão de duas funções polinomiais g e h . Sendo funções polinomiais, são diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções diferenciáveis é uma função diferenciável, desde que o denominador não se anule, concluímos que f é diferenciável no seu domínio. Calculemos a derivada para $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}.$$

Novamente, f' pode ser definida como o quociente de funções polinomiais, cujo domínio é $\mathbb{R}$. Por outro lado, o denominador só se anula para $x = 2$. Como o quociente de funções diferenciáveis é uma função diferenciável, sempre que o denominador não se anule, concluímos que f' é diferenciável, pelo que f é duas vezes diferenciável no seu domínio. Calculemos a segunda derivada de f , para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 3)'(x - 2)^2 - ((x - 2)^2)'(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{(2x - 4)(x - 2)^2 - 2(x - 2)(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{2(x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 2(x - 2)(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{2(x - 2)(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x - 3)}{(x - 2)^4} = \frac{2(x - 2)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{2}{(x - 2)^3}, \end{aligned}$$

pois $x \in D_f \Rightarrow x \neq 2$.

Uma resolução alternativa para o cálculo da segunda derivada seria reparar que

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 - 1}{(x - 2)^2} = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2},$$

pelo que

$$f''(x) = -\frac{-2}{(x - 2)^3} = \frac{2}{(x - 2)^3}.$$

- (d) Estude a monotonia de f .

Pela alínea anterior

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

e como o denominador é sempre positivo para $x \in D_f$, então o sinal da derivada f' é o mesmo sinal do numerador, ou seja da função polinomial $p(x) := x^2 - 4x + 3$, desde que $x \neq 2$. Começamos por determinar as raízes de $p(x) = 0$,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

ou seja

$$x = 3 \vee x = 1.$$

Como o coeficiente do termo x^2 em $p(x)$ é positivo, então o gráfico de p tem a concavidade voltada para cima. Como f' tem o mesmo sinal que p (desde que $x \neq 2$), concluímos que f' é positiva nos intervalos $] - \infty, 1[$ e $]3, +\infty[$ e negativa nos intervalos $]1, 2[$ e $]2, 3[$. Então, f é crescente em $] - \infty, 1[$ e em $]3, +\infty[$ e é decrescente nos intervalos $]1, 2[$ e $]2, 3[$.

- (e) Estude a concavidade de f .

Pela alínea b), temos

$$f''(x) = \frac{2}{(x - 2)^3},$$

pelo que o sinal de f'' é o mesmo de $q(x) := (x - 2)^3$, ou seja é negativa para $x < 2$ e positiva para $x > 2$. Então f tem a concavidade voltada para baixo em $] - \infty, 2[$ e voltada para cima em $]2, +\infty[$.

- (f) Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 de f , no ponto $x_0 = 1$.

Uma vez que f é duas vezes diferenciável em $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, em particular, f é duas vezes diferenciável no ponto $x_0 = 1$ e o polinómio de Taylor de ordem 2 de f , nesse ponto é

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} \\ &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)(x - 1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Agora temos

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 0, \quad \text{e} \quad f''(1) = -2,$$

pelo que

$$p_2(x) = 2 - \frac{2(x - 1)^2}{2} = 2 - (x - 1)^2.$$

- (g) Determine os extremos locais de f .

Pela alínea a), a função f é duas vezes diferenciável no seu domínio, pelo que todos os eventuais pontos de extremo local deverão ser zeros da derivada,

$$f'(x) = 0,$$

ou seja

$$x = 3 \vee x = 1,$$

pela alínea c). Temos

$$f''(1) = -2 < 0, \text{ e } f''(3) = 2 > 0,$$

pelo que f tem um máximo local no ponto $x = 1$ (cujo valor é $f(1) = 2$) e um mínimo local no ponto $x = 3$ (cujo valor é $f(3) = 6$).

3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{4x}}{(\sin(\pi x))^2}.$$

Este limite conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Tentando levantá-la usando a regra de Cauchy deveremos estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{((x-1)^2 e^{4x})'}{((\sin(\pi x))^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)e^{4x} + 4e^{4x}(x-1)^2}{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)}$$

que conduz novamente a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Tentando levantar esta indeterminação novamente usando a regra de Cauchy, deveremos estudar o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2(x-1)e^{4x} + 4e^{4x}(x-1)^2)'}{(2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x))'} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{4x} + 8(x-1)e^{4x} + 16e^{4x}(x-1)^2 + 8e^{4x}(x-1)}{2\pi^2 (\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x))} &= \frac{2e^4}{2\pi^2 \cos^2(\pi)} = \frac{e^4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Uma vez que este limite existe, pela regra de Cauchy, também existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)e^{4x} + 4e^{4x}(x-1)^2}{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)}$$

e os limites são iguais, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)e^{4x} + 4e^{4x}(x-1)^2}{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)} = \frac{e^4}{\pi^2}.$$

Como este limite existe, novamente pela regra de Cauchy também, existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{4x}}{(\sin(\pi x))^2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{4x}}{(\sin(\pi x))^2} = \frac{e^4}{\pi^2}.$$

Uma resolução alternativa para o cálculo do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{4x}}{(\sin(\pi x))^2}$$

seria fazer a substituição $x = 1 + t$, pelo que $x - 1 = t$. Então, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{4x}}{(\sin(\pi x))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 e^{4(t+1)}}{(\sin(\pi t + \pi))^2}.$$

Sabemos que $\sin(\pi + \pi t) = -\sin(\pi t)$, pelo que o limite que pretendemos calcular é igual a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 e^{4(t+1)}}{(\sin(\pi t))^2}.$$

Como existem os seguintes limites

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\pi t)^2}{(\sin(\pi t))^2} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4(1+t)}}{\pi^2} = \frac{e^4}{\pi^2},$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 e^{4(t+1)}}{(\sin(\pi t))^2} = 1 \times \frac{e^4}{\pi^2} = \frac{e^4}{\pi^2}.$$

4. Prove que a função $f(x) = 6x^3 - \sin(\pi x) + 10$ tem uma e uma só raiz em $\mathbb{R}$ e que esta pertence ao intervalo $[-2, -1]$.

Antes de mais verificamos que $\sin(\pi x)$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a composição da função polinomial πx com a função $\sin(x)$, que sabemos serem ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Então, a função f diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a soma da função polinomial $6x^3 + 10$ com a função $\sin(\pi x)$, que são ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e, sendo diferenciável em $\mathbb{R}$, é também contínua em $\mathbb{R}$.

Agora notamos que $f(-2) = 6 \times (-2)^3 - \sin(-2\pi) + 10 = -38 < 0$ e $f(-1) = 6 \times (-1)^3 - \sin(-\pi) + 10 = 4 > 0$, ou seja a função f (que é contínua em $\mathbb{R}$) muda de sinal no intervalo $] -2, -1[$, pelo que o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos uma raiz nesse intervalo. Temos agora que

$$f'(x) = 18x^2 - \pi \cos(\pi x)$$

e para $x < -1$, temos

$$x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 18x^2 > 18.$$

Por outro lado, $-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1 \Rightarrow -\pi \leq \pi \cos(\pi x) \leq \pi$ e, portanto,

$$f'(x) > 18 - \pi > 0,$$

pelo que no intervalo $] -\infty, -1[$ a função é estritamente crescente e o intervalo $] -2, -1[$ contém uma e uma só raiz. Por outro lado, como f é crescente no intervalo $] -\infty, -2]$ temos, em particular,

$$f(x) \leq f(-2) = -38 < 0, \forall x \leq -2$$

pelo que não existe nenhuma raiz no intervalo $] -\infty, -2]$. Para $x > -1$, temos

$$x > -1 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow 6x^3 > -6 \Rightarrow 6x^3 + 10 > -6 + 10 = 4$$

e como $-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1$, então $f(x) > 4 - 1 = 3 > 0$, pelo que f não tem raízes no intervalo $[-1, +\infty[$. Concluimos, portanto, que f tem uma única raiz em $\mathbb{R}$ e que esta pertence ao intervalo $[-2, -1]$