E-fólio B - proposta de resolução

1. **[0.8 val.]** Prove por indução matemática, que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Comecemos pela base de indução. Devemos verificar que o caso $n = 1$ conduz a uma proposição verdadeira. Temos no primeiro membro,

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$$

e no segundo membro

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

pelo que o resultado é válido quando $n = 1$. Agora assumimos que é verdade a hipótese de indução, isto é, que para um dado $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$$

e pretendemos verificar que o resultado também será verdadeiro para o inteiro seguinte, ou seja devemos verificar que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{\underbrace{(n+1)}_{j=n+1}(\underbrace{n+1}_{j=n+1}+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

pela hipótese de indução. Então,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \underbrace{=}_{n>-1} \frac{n+1}{n+2}$$

como pretendíamos provar. Note-se que na última igualdade acima sabemos que temos $n = 1, 2, ...$, pelo que, em particular, $n > -1$ e, portanto, podemos efectuar o corte do factor $n+1$ que aparece tanto no numerador como no denominador. Então concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall n = 1, 2, 3, ...$$

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x+1}$.

   (a) **[0.1 val.]** Determine o domínio de f.

   Para determinar o domínio de f devemos impor que o denominador não se anule, ou seja, devemos impor que

   $$2x+1 \neq 0 \iff 2x \neq -1 \iff x \neq -\frac{1}{2}$$

   e, portanto,

   $$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

   (b) **[0.3 val.]** Prove que f é duas vezes diferenciável no seu domínio e calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

   A função f é uma função racional, ou seja, é definida como a divisão de duas funções polinomiais, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Portanto, f é duas vezes diferenciável em todos os pontos para os quais o denominador não se anule, ou seja f é duas vezes diferenciável no seu domínio. Temos

   $$f'(x) = \frac{(x^2+2)'(2x+1) - (2x+1)'(x^2+2)}{(2x+1)^2} = \frac{2x(2x+1) - 2(x^2+2)}{(2x+1)^2}$$
   $$= \frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}.$$

Provámos em cima que f é duas vezes diferenciável no seu domínio, pelo que existe a função f'', a segunda derivada de f que pode ser calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
f''(x) = (f'(x))' &= \left(\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}\right)' = \\
&= \frac{(2x^2+2x-4)'(2x+1)^2 - ((2x+1)^2)'(2x^2+2x-4)}{(2x+1)^4} = \\
&= \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - (2(2x+1)(2x+1)')(2x^2+2x-4)}{(2x+1)^4} = \\
&= \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - 4(2x+1)(2x^2+2x-4)}{(2x+1)^4} = \\
&= \frac{(2x+1)\left[(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x-4)\right]}{(2x+1)^4} \underbrace{=}_{x\in D_f \Rightarrow 2x+1\neq 0} \\
&= \frac{(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x-4)}{(2x+1)^3} = \\
&= \frac{8x^2+4x+4x+2-8x^2-8x+16)}{(2x+1)^3} = \\
&= \frac{18}{(2x+1)^3}.
\end{aligned}$$

(c) **[0.3 val.]** Estude a monotonia de f.

Para estudar a monotonia de f podemos estudar o sinal de f'. Pela alínea anterior, temos

$$f'(x) = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}.$$

Para $x \in D_f$, temos $2x+1 \neq 0$ e, portanto, o termo no denominador $(2x+1)^2$ é sempre (estritamente) positivo. Concluímos que o sinal de f' é o mesmo do termo no numerador, $(2x^2+2x-4)$. Temos

$$\begin{aligned}
(2x^2+2x-4) = 0 &\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2\times 4\times 4}}{4} \\
&\iff x = \frac{-2\pm 6}{4} \\
&\iff x = 1 \vee x = -2.
\end{aligned}$$

Como o coeficiente em x^2 é positivo, sabemos que o gráfico desta função polinomial de segundo grau é uma parábola com a concavidade voltada para cima, pelo que

$$f'(x) < 0 \iff x \in]-2, 1[$$

e

$$f'(x) > 0 \iff x \in (]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[)\,.$$

Então, f é decrescente em $]-2, -\frac{1}{2}[$ e em $]-\frac{1}{2}, 1[$ e crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]1, +\infty[$.

(d) **[0.3 val.]** Estude a concavidade de f.

Podemos estudar a concavidade de f analisando o sinal de f''. Pela alínea anterior,

$$f''(x) = \frac{18}{(2x+1)^3}$$

e o sinal de f'' será o mesmo do termo no denominador $(2x+1)^3$, que é o mesmo sinal de $(2x+1)$. Assim, concluímos que

$$f''(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$$

e

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[,$$

pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

(e) **[0.3 val.]** Determine as coordenadas dos máximos e mínimos locais no gráfico de f, se estes existirem.

Pela alínea b), f é diferenciável no seu domínio, pelo que os eventuais pontos de extremo local deverão coincidir com os zeros de f'. Pela alínea anterior,

$$f'(x) = 0 \iff x = -2 \vee x = 1.$$

Por outro lado,

$$f''(-2) = \frac{18}{(-4+1)^3} = -\frac{18}{27} < 0,$$

pelo que $x = -2$ é um ponto de máximo local e

$$f''(1) = \frac{18}{(2+1)^3} = \frac{18}{27} > 0,$$

pelo que $x = 1$ é um ponto de mínimo local.

Temos

$$f(1) = \frac{1+2}{2+1} = 1$$

e

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 2}{-4+1} = -\frac{6}{3} = -2,$$

pelo que a coordenada do mínimo local no gráfico de f é o ponto

$$(1, f(1)) = (1, 1)$$

e a coordenada do máximo local é o ponto

$$(-2, f(-2)) = (-2, -2).$$

(f) **[0.2 val.]** Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 de f, no ponto $x_0 = 1$.

O polinómio de Taylor de ordem 2 de f, no ponto $x_0 = 1$ é

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
&= f(1) + \underbrace{f'(1)}_{=0}(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\
&= 1 + \frac{2}{3 \times 2}(x-1)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2.
\end{aligned}$$

3. **[0.9 val.]** Calcule, justificando:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right)}{(x-2)^2}.$$

Tanto a função no numerador como no denominador são funções indefinidamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, pois o numerador resulta da soma, produto, divisão e composição de funções trigonométricas, polinómios e da função exponencial, e o denominador é um polinómio, sendo que as funções trigonométricas, polinómios e a função exponencial são indefinidamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, a substituição directa de x por 2 conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Para tentarmos usar a regra de Cauchy calculamos

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right)\right]'}{\left[(x-2)^2\right]'} = \lim_{x\to 2} \frac{-\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right) + e^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{2\,(x-2)}$$

e notamos que a substituição directa de x por 2 conduz novamente a uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Com vista a usar a regra de Cauchy, calculamos

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left[-\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right) + e^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]'}{\left[2\,(x-2)\right]'} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right) - \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)e^x + e^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{\pi}{4}e^x\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{2} =$$

$$\frac{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)\left(e^2 - e^2\right) - \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)e^2 + e^2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}e^2\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2} =$$

$$\frac{-\frac{\pi}{4}e^2 - \frac{\pi}{4}e^2}{2} = -\frac{\pi e^2}{4}.$$

Como este limite existe, então pela regra de Cauchy, também existe

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right) + e^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{2\,(x-2)}$$

e temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right) + e^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{2\,(x-2)} = -\frac{\pi e^2}{4}.$$

Como este último limite existe, novamente pela regra de Cauchy, concluímos que também o limite inicial existe e temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(e^x - e^2\right)}{(x-2)^2} = -\frac{\pi e^2}{4}.$$

4. **[0.8 val.]** Prove que a função $f(x) = x^3 + \sin(2x) + 2x - 10$ tem um e um só zero em $\mathbb{R}$ e que este pertence ao intervalo $[1, 2]$.

   A função f é diferenciável (e portanto, contínua) em $\mathbb{R}$, porque resulta da composição e soma de funções polinomiais e da função seno, sendo todas estas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Por outro lado, temos

$$f(1) = 1^3 + \sin(2) + 2 - 10 = \sin(2) - 7 \leq 1 - 7 = -6 < 0,$$

e

$$f(2) = 2^3 + \sin(4) + 4 - 10 = 2 + \sin(4) \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

Então f uma função contínua no intervalo $[1, 2]$ e que muda de sinal nesse intervalo. Pelo teorema de Bolzano concluímos que existe (pelo menos) um zero de f nesse intervalo.

Agora notamos que

$$f'(x) = 3x^2 + 2\cos(2x) + 2 \geq 3x^2 - 2 + 2 = 3x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e

$$f'(0) = 3 \times 0^2 + 2\cos(2 \times 0) + 2 = 2 + 2 = 4 > 0,$$

pelo que $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, concluímos que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pelo que tem no máximo um zero. Concluímos portanto que f tem um e um só zero em $\mathbb{R}$ e que este pertence ao intervalo $[1, 2]$.

FIM