1.1 - Definições

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. A é uma **matriz linha** se m=1, A é uma **matriz coluna** se n=1, A é uma **matriz quadrada** se m=n, e neste caso diz-se que A é uma matriz de ordem n.

1.2 - Operações com matrizes

1.2.1 - Soma

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denotamos A+B, à matriz de $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é $A_{i,j} + B_{i,j}$, isto é

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{i,j},\ i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n$$

A adição em $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem propriedades idênticas às da adição em $\mathbb{K}$:

1. $\forall_{A,B\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ A+B = B+A$ (comutatividade da adição em $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).
2. $\forall_{A,B,C\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ (A+B)+c = A+(B+C)$ (associatividade da adição em $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).
3. $\exists^1_{Z\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ \forall_{A\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ A+Z = A = Z+A$ (existência do elemento neutro da adição em $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).
4. $\forall_{A\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ \exists^1_{V\in M_{m\times n}\mathbb{K}}\ A+V = Z = V+A$ sendo Z o elemento neutro para a adição em $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (existência de oposto, para a adição, de qualquer $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1.2.2 – Produto de um escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto do escalar** α **pela matriz** A, e denotamos por αA à matriz de $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i, j) é αA_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{i,j},\ i = 1, \cdots, m\ j = 1, \cdots, n$$

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ e, em particular, $(-1)A = -A$.
6. Se $\alpha A = 0_{m\times n}$ então $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m\times n}$.

1.2.3 – Produto de matrizes

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto** da matriz A pela matriz B, e representamos por AB, à matriz de $M_{n\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = A_{ij}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \text{ com } i = 1, \cdots, mj = 1, \cdots, p$$

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição)

   $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição).
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$
4. $AI_n = A = I_nA$

Algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. Em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, a multiplicação de matrizes não é comutativa;
2. Existem matrizes A e B tais que AB=0, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
3. Existem matrizes A, B, C tais que:

   $A \neq 0$ e $AB = AC$, com $B \neq C$,

   $BA = CA$ e $A \neq 0$, com $B \neq C$

A multiplicação de matrizes não é comutativa, contudo podem existir matrizes $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AB = BA$. Neste caso dizemos que A e B são **comutáveis** ou que A e B **comutam**. É o que sucede se considerarmos $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ arbitrária e tomarmos, por exemplo $B = 0_{n\times n}$ ou $B = I_n$ ou $B = A$.

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}_0$.Chamamos **potência de expoente** k de A, e representamos por A^k, à matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que :

$$A^k = \begin{cases} I_n \text{ , se } k = 0 \\ A^{k-1}A \text{ , se } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.3 - Matrizes Invertíveis

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **invertível**, ou que A tem inversa, se existir uma matriz $\mathrm{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\mathrm{AB{=}I}_n = BA$. A esta matriz chama-se inversa e representa-se por A^{-1}.

1.4 - Transposição e conjugação de matrizes

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **transposta** de A e representa-se por A^T, à matriz $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}, i = 1, \cdots, n, j = 1, , m$.

Propriedades da transposição:

a) $\left(A^T\right)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

e) $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k, \forall k \in \mathbb{N}$

f) Se A é invertível então A^T é invertível e $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Uma matriz $A \in M_p(\mathbb{K})$ diz-se **ortogonal** se $A^T A = I_n = AA^T$ e **hemiortogonal** se $A^T A = -I_n = AA^T$

Diz-se que uma matriz *A* é **simétrica** se$A^T = A$ e que é **hemisimétrica** se $A^T = -A$.

Só podem ser simétricas ou hemisimétricas as matrizes quadradas.

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Chamamos **conjugada** $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ de A, e representa-se por $\overline{A}$, à matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ que se obtém de A substituindo cada elemento de A pelo seu conjugado, isto é,

$\left(\overline{A}\right) = \overline{A_{ij}}, \quad i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n$.

Propriedades das matrizes conjugadas:

a) $\overline{\overline{A}} = A$

b) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

c) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$

d) $\overline{AB} = \overline{A} \quad \overline{B}$

e) $\overline{a^k} = \left(\overline{A}\right)^k$

f) Se m=n e A é uma matriz invertível então $\overline{A}$ é invertível $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

g) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{A^T}$

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Chamamos **transconjugada** de A, e representamos por A^*, à matriz $\left(\overline{A}\right)^T$.

Dizemos que uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ é **hermítica** se $A^* = A$, ou equivalente, se $A_{ij} = \overline{A_{ji}}, \ i,j = 1, \cdots, n$ e que é **semi-hermítica** se $A^* = -A$ ou equivalente, se $A_{ij} = -\overline{A}_{ji}, \ i,j = 1, \cdots, n$.

1.5 – Transformações e matrizes elementares

Transformação elementar sobre as linhas de A é uma transformação de um dos seguintes tipos:

1. Troca de posição, na matriz A, da linha *i* com a linha *j*, com $i \neq j$. Representa-se $l_i \to l_j$.
2. Multiplicação de uma linha de A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Representa-se por αl_i.
3. Substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$ com $j \neq i$. Representa-se por $l_i + \beta l_j$.

Chamamos **matriz elementar** de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n efectuando uma única transformação elementar sobre as linhas, de tipo I, II ou III, respectivamente.

Pode-se efectuar qualquer transformação elementar sobre as linhas de uma matriz $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ premultiplicando A pela matriz que resulta de I_m efectuando sobre as suas linhas a mesma transformação que pretendemos operar em A.

1.6 - Formas de escada e característica de uma matriz

Chama-se **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha. Uma linha nula não tem pivô.

Pivôs de uma matriz são todos os pivôs das suas linhas não nulas.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A está em **forma de escada(f.e.)** se $\mathrm{A}=0_{m\times n}$ ou se os pivôs da matriz A estão nas linhas $1,\cdots,s$, nas posições $(1,\mathrm{k}_1),\cdots,(s,K_s)$, com $1\leq k_1 < \cdots < k_s \leq n$.

Para reduzir uma matriz $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ à forma de escada:

1. Se $\mathrm{A}=0_{m\times n}$ ou a é uma matriz linha então A está na forma de escada e o processo termina;
2. Por troca de linhas (transformação elementar de tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas de A, um pivô com índice de coluna mínimo.
3. Para cada linha i de B com i=2, …, m substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{it}/B_{1t}$ pela linha 1 (transformação tipo III).
4. Despreze-se a linha 1 da matriz obtida anteriormente e repete-se o processo.

Diz-se que uma matriz está em **forma de escada reduzida (f.e.r.)** se simultaneamente a matriz está em forma de escada e se os seus pivôs, quando existem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Processo de redução de uma matriz não nula e em forma de escada à forma de escada reduzida:

1. Seja A_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para garantir que o pivô da linha s passa a 1, multiplica-se a linha s por $1\overline{A_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II). Seja B a matriz resultante. Se s=1 a matriz está em forma de escada reduzida e o processo termina.
2. Para cada linha *i* de B, com $\mathrm{i}=1,\cdots,s-1$, substitua-se a linha *i* pela sua soma com o produto de -B_{ik} pela linha *s* (transformações elementares do tipo III). (Corresponde a anular os elementos da coluna do pivô B_{sk}, com índice de linha inferior ao pivô).

   Obtém-se uma nova matriz *C* que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna *k* são todas nulas à excepção do pivô C_{sk} que é igual a 1.
3. "Desprezam-se" as linhas de *C* de índice superior ou igual a *s* e aplica-se o processo à matriz resultante.

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.À única matriz equivalente por linhas a *A* e em forma de escada reduzida chama-se **forma de escada reduzida** de A ou **forma de Hermite** de A.

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a *A* e em forma de escada chama-se **característica** de *A* e denota-se por r(A) (do inglês **rank**).

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica. Isto é se $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\mathrm{A}\xrightarrow[(linhas)]{}B$ então r(A)=r(B), ou seja matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

As matrizes$\mathrm{A},\ \mathrm{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas se, e só se, tiverem a mesma forma de escada reduzida.

1.7 - Características das matrizes invertíveis

Seja $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. A é invertível;
2. r(A)=n;
3. I_n é a forma de escada reduzida de A;
4. A é igual a um produto de matrizes elementares.

Ao efectuar transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n a partir de A (o que corresponde a transformar A na sua forma de escada reduzida), se a Partir de I_n, efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas (isto é, as mesmas transformações e pela mesma ordem) a matriz resultante é A^{-1}.

Sejam $\mathrm{A},\ \mathrm{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. A matriz AB é invertível se, e só se A e B são ambas invertíveis. Se $\mathrm{AB{=}I}_n$ então A e B são invertíveis e $\mathrm{A}^{-1} = B$ e $\mathrm{BA{=}I}_n$

2 - Sistema de Equações lineares

Uma **equação linear** nas incógnitas $\mathrm{x}_1, \cdots, x_n$, sobre K, é uma equação do tipo $\mathrm{a}_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$, com $\mathrm{a}_1, \cdots, a_n, b \in \mathbb{K}$. $\mathrm{a}_1, \cdots, a_n$ são os **coeficientes** da equação e b o **termo independente** da equação. Se b=0 então a equação diz-se **homogénea**.

Diz-se que $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação ou que **satizfaz** a equação se substituindo x_i por β_i, i=1,$\cdots, n$, se obtém uma proposição verdadeira, isto é $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ é solução da equação se é verdadeira a proposição $\alpha_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b$.

Sistema de equações homogéneo é o sitema em que todas as equações são homogéneas.

Num sistema de equações lineares (S) AX=B, com $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de (S) se, e só se, $\mathrm{A}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B$

Sejam (S) e (S') sistemas de equações lineares sobre K Dizemos que (S) e (S') são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto de soluções.

Seja AX=B um sistema de equações lineares. Se [A|B] e [A'|B'] são equivalentes por linhas, isto é se $[A|B]\xrightarrow[(linhas)]{}[A'B']$ então os sistemas AX=B e A'X=B' são equivalentes.

Seja AX=B um sistema de equações lineares possível e indeterminado, com $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de **incógnitas livres**, isto é, a $\mathrm{n\text{-}r(A)}$, chama-se **grau de indeterminação** do sistema.

$$\mathrm{AX{=}B}\begin{cases} \begin{array}{c} r(A) < r([A|B]) \\ \text{Sistema impossivel} \end{array} \\ \\ r(A) = r([A|B]) \begin{cases} \begin{array}{c} r(A) = r([A|B]) = n \\ \text{Sistema Possivel Determinado} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} r(A) = r([A|B]) < n \\ \text{Sistema Possivel Indeterminado} \\ \text{Com Grau de indeterminacao n-r(A)} \end{array} \end{cases} \end{cases}$$

Dizemos que um sistema de equações lineares AX=B é um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

3 – Determinantes

3.1 – Definição

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, chamamos **determinante** de A, e representa-se por det A ou $\|A\|$ ao elemento de $\mathbb{K}$ definido da seguinte forma:

1. Se n=1 então $detA = A_{11}$;
2. Se n>1 então $detA = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(-1)^{1+k}detA(1 \mid k)$.

Uma matriz $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível se e só se o determinante de A for não nulo.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $\mathrm{n} \geq 2$. Dados i,j $\in \{1, 2, \cdots, n\}$ representamos por $\mathrm{A(i} \mid j)$.a matriz que se obtém de *A* suprimindo a linha i e a coluna j de A.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A e representa-se por det *A* ou |A|, ao elemento de K definido, por recorrência da seguinte forma:

- Se n=1 então det $\mathrm{A{=}A_{11}}$;
- Se n>1 então $\mathrm{det\ A} = \mathrm{A}_{11}(-1)^1 detA(1 \mid 1) + \cdots + A_{1n}(-1)^{1+n}detA(1 \mid n)$ = $\sum_{k=1}^{n} A_{1k}(-1)^{1+k}detA(1 \mid k)$.

O determinante de uma matriz de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

O determinante de uma matriz de ordem 3 é uma diferença de 6 parcelas em que o aditivo tem 3 parcelas e o subtractivo tem outras 3 parcelas. O determinante desta matriz pode ser calculado pela **regra de Sarrus** que diz que as parcelas do aditivo são dadas pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelos produtos dos elementos abrangidos pelos triângulos com base paralela à diagonal principal. As parcelas do subtractivo obtêm-se da mesma forma com base na diagonal secundária.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ com $\mathrm{n}\geq 2$. Designa-se por **complemento algébrico** e representa-se por $\widehat{A}$, o escalar $\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} det A(i \mid j)$ em que $A(i \mid j)$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e acoluna j.

Teorema de Laplace. Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$com $\mathrm{n}\geq 2$. O determinante de A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma qualquer linha de A pelos complementos algébricos das respectivas posições, isto é:

$$\det\ \mathrm{A} = \mathrm{A}_{1i}\widehat{A}_{i1} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{in}$$

3.2 - Propriedades dos determinantes

Se $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem uma linha nula então det A=0.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $\mathrm{n}\geq 2$. Se A tem alinha i igual à linha j, com $i \neq j$, então det A=0.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se que $detA = detA^T$, ou seja que uma matriz e a sua transposta têm o mesmo determinante.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $det\overline{A} = \overline{detA}$.

Se $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) então o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se os elementos da linha i da A são da forma $A_{ik} = B_{ik} + C_{ik}$ com $k = 1, \cdots, n$, então

$$det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{in} \\ B_{i1}+C_{i1} & \cdots & B_{in}+C_{in} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{in} \\ B_{i1} & \cdots & B_{in} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{in} \\ C_{i1} & \cdots & C_{in} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

3.3 - Transformações elementares e determinantes

Sejam $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

- $\mathrm{Se}\ i \neq j\ \mathrm{e}\ A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B$ então det B = - det A;
- $\alpha \neq 0\ \mathrm{e}\ A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$ então det B = α det A;
- $\mathrm{Se}\ i \neq j\ \mathrm{e}\ A \xrightarrow[l_i + \beta l_j]{} B$ então det B = det A.

Numa linguagem informar diz-se que num determinante um escalar pode ser posto em evidência só por estar a multiplicar por uma linha (ou coluna). Ou seja, como:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to [2l_1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = B$ então $detB = 2.detA$.

Sejam $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $det(\alpha A) = \alpha^n detA$

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$, então det A=0 se , e só se, det B=0.

Processo para calcular o determinante de uma matriz $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$:

- Efectuam-se as transformações lineares sobre as linhas de A de forma a transformar a matriz A numa matriz A' em forma de escada.
- Considerando as correspondentes alterações no determinante resultantes de cada uma dessas transformações elementares, obtenha-se a relação entre o det A e det A'.
- Como det A' é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal e é conhecida a relação entre det A e det A' , obtém-se então o valor de det A.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se que A é invertível se, e só se, det $A \neq 0$.

3.4 - Determinante do produto de matrizes

Sejam $\mathrm{A},\ \mathrm{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $det(AB) = detA \cdot detB$.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, ou equivalentemente uma matriz tal que $detA \neq 0$. Tem-se $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$

3.5 – Cálculo da inversa a partir da adjunta

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Chamamos **matriz dos complementos algébricos** de A, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo complemento algébrico da respectiva posição.

Chamamos **adjunta** de A, e representa-se por adj A, à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é $adjA = \hat{A}^T$.

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, então

$$A_{i1}\hat{A}_{j1} + A_{i2}\hat{A}_{j2} + \cdots + A_{in}\hat{A}_{n1} = 0$$

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Tem-se:

1. $\text{Adj A} = \begin{bmatrix} detA & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & detA & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & detA \end{bmatrix} = (detA)I_n$

2. Se A é invertível então $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} adjA$

3.6 – Regra de Cramer

(Regra de Cramer) Seja AX=B um sistema de equações lineares, com $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, seja $A_{(j)}$ a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j pela coluna de B. A única solução do sistema anterior é o n-uplo $\left(\frac{detA_{(1)}}{detA}, \cdots, \frac{detA_{(n)}}{detA}\right)$.

Só tem interesse aplicar este método de resolução em sistemas com valores pequenos de *n*, sendo preferível utilizar o método de resolução do capítulo 2.

3.7 – Outra definição de determinante

Seja $n \in \mathbb{N}$. chamamos **permutação** de $1, \cdots n$ a qualquer aplicação bijectiva de $1, \cdots, n$ em $1, \cdots, n$ e representamos por S_n o conjunto de todas as permutações de $1, \cdots, n$. Existem n! permutações de $1, \cdots, n$.

Numa permutação σ, uma **inversão** é um par $(\sigma(i), \sigma(j))$ tal que $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$. Representamos número de inversões de σ por $\eta(\sigma)$.

Dada uma permutação σde $1, \cdots, n$ um procedimento simples para calcular o número de inversões de σ é o seguinte:

- Para cada elemento de $\sigma(k)$ da permutação, efectue-se a contagem do número de elementos à sua direita e inferiores a $\sigma(k)$. Representa-se tal número por s_k.
- Tem-se $(\sigma) = s_1 + \cdots + s_n$.

Diz-se que uma permutação σ é **par** (respectivamente **ímpar**) se $\eta(\sigma)$ é um número par (respectivamente ímpar).

Seja $\mathrm{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$:

1. Considerem-se todos os produtos do tipo $A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_n j_n}$ sendo $(i_1, \cdots, i_n)$ e $(j_1, \cdots, j_n)$ permutações de $1, \cdots, n$, isto é todos os produtos possíveis de *n* elementos da matriz de forma a que em cada produto figurem um, e um só, elemento de cada linha e um, e um só, elemento de cada coluna de A.
2. Afecte-se, cada um dos produtos obtidos em **1**, do sinal "+" se as permutações $(i_1, \cdots, i_n)$e $(j_1, \cdots, j_n)$ têm a mesma paridade e do sinal "-" no caso contrário.

Designamos por **determinante** de A, e representa-se por det A ou $\mid A \mid$, a soma dos escalares obtidos em **2**. Assim $\sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{\eta(\sigma)} A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$.

4 – Espaços vectoriais

4.1 – Definição e propriedades

Seja *E* um conjunto não vazio e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Consideremos definidas duas operações:

- Uma a que designamos por **adição** em *E* e representamos por +. que é uma operação binária, isto é, associa a cada par *(u,v)* de elementos de *E* um, e um só, elemento de *E* que representamos por *u*+*v*.

- Uma operação, que designamos por **multiplicação externa** e representamos por ., que a cada par (α, u), com $\alpha \in \mathbb{K}$, e $u \in E$, associa um, e um só, elemento de *E* que denotamos por αu.

Dizemos que *E*, com estas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ ou que $(E, +, \cdot)$ é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$ se:

1. A adição interna $\oplus$ tem as seguintes propriedades:

   (A_1) $\forall_{u,v \in E}$ $u \oplus v = v \oplus u$, comutativa

   (A_2) $\forall_{u,v,w \in E}$ $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$, associativa

   (A_3) $\exists_{0_E \in E}$ $\forall_{u \in E}$ $u \oplus 0_E = u = 0_E \oplus u$, elemento neutro

   (A_4) $\forall_{u \in E}$ $\exists_{u'} \in E$ $u \oplus u' = 0_E = u' \oplus u$, elemento simétrico

2. A multiplicação externa $\times$ tem as seguintes propriedades:

   (M_1) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}}$ $\forall_{u,v \in E}$ $\alpha \otimes (u + v) = \alpha \otimes u \oplus \alpha \otimes v$, distributiva $\otimes$ em $\oplus$

   (M_2) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}}$ $\forall_{u \in E}$ $(\alpha + \beta) \otimes u = \alpha \otimes u \oplus \beta \otimes u$, distributiva $\oplus$ em $\otimes$

   (M_3) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}}$ $\forall_{u \in E}$ $(\alpha \cdot \beta) \otimes u = \alpha \otimes (\beta \otimes u)$ associativa mista

   (M_4) $\forall_{u \in E}$ $\exists 1_{\mathbb{K}}$ $1 \otimes u = u$ Elemento neutro

Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Aos elementos de *E* chamamos **vectores**. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que *E* é um **espaço vectorial complexo** e se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que é um **espaço vectorial real**.

Seja *E* um conjunto não vazio e + uma operação binária em E com as propriedades (A_1) a (A_4). Tem-se:

1. O elemento neutro da adição é único (Habitualmente representado por 0_E.).
2. Para cada $u \in E$, o oposto de *u*, para a adição, é único (O oposto, para a adição, de $u \in E$ é representado por $-u$.
3. Se $u, v, w \in E$ são tais que $u + v = u + w$ então $v = w$. (Lei do corte, à esquerda).
4. Se $u, v, w \in E$ são tais que $v + u = w + u$ então $v = w$. (Lei do corte, à direita).

Seja *E* um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in E$. Tem-se:

1. $\alpha 0_E = 0_E$
2. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$
3. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(u)$ e em particular, $(-1)u = -u$
4. Se $\ = 0_E$ então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

4.2 - Subespaços vectoriais

Seja *E* um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto de *F* de *E* é um **subespaço vectorial** de *E*, ou simplesmente que é um **subespaço** de *E*,se *F* é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações nele naturalmente definidas por ser subconjunto de *E* (a que se chamam **operações induzidas** pelas operações de *E* no conjunto *F*).

(**Critério de subespaço vectorial**) Seja *E* um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se, *F* é um subespaço de *E* se, e só se, satisfaz cada uma das condições seguintes:

1. $F \subseteq E$
2. $0_E \in F$
3. $\forall_{u,v \in F}\ u + v \in F$
4. $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}}\ \forall_{u \in F}\ \alpha u \in F$

ou equivalente, se satisfaz as condições que resultam das anteriores substituindo **2** por $F \neq \emptyset$.

Se *E* é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$então *E* e 0_E são subespaços de *E*, e designam-se por **subespaços triviais** de *E*, sendo iguais se, e só se, $E = \{0_E\}$.

Se *F* e *G* são subespaços de um espaço vectorial *E* então $F \cap G$ é, ainda, um subespaço de *E*.

Sejam *F* e *G* subespaços de um espaço vectorial *E*. Tem-se , $F \cup G$ é um subespaço de *E* se, e só se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Sejam *F* e *G* subespaços de um espaço vectorial *E*. Chamamos **soma** do subespaço *F* com o subespaço *G*, e representamos por *F+G*, a $F + G = \{u + v :\ u \in F \wedge v \in G\}$. Dizemos que *E* é a **soma** de *F* e *G*, e escrevemos $E = F + G$, se todo o elemento de E se pode escrever como soma de um elemento de *F* com um elemento de *G*.

A soma de dois subespaços de um espaço vectorial *E* é ainda um subespaço de *E*.

Sejam F e *G* subespaços de um espaço vectorial *E*. Dizemos que *E* é a **soma directa** de *F* e *G*, e escrevemos, $E = F \oplus G$, se para cada $w \in E$ existe um único par (u, v), com $u \in F$ e $v \in G$ tal que $w = u + v$.

Nestas condições dizemos que *G* (respectivamente *F*) é um **subespaço suplementar** de *F* (respectivamente, *G*) em *E*.

Dizemos ainda que o vector *u* é a **projecção** de *w* sobre *F*, segundo *G*, e que o vector *v* é a projecção de *w* sobre *G*, segundo *F*.

Sejam *F* e *G* subespaços de um espaço vectorial E. São equivalentes as afirmações:

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. *Quaisquer que sejam* $u, u' \in F$ *e* $v, v' \in G$, *se* $u + v = u' + v'$ *então* $u = u'$ *e* $v = v'$.

Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E. São equivalentes as afirmações:

1. $E = F \oplus G$
2. $E = F + G$ e $F \cap G = \{0_E\}$

4.3 – Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Seja *E* um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \cdots, u_r$ elementos de *E*. Dizemos que $v \in E$ é **combinação linear** dos vectores $u_1, \cdots, u_n$, se existirem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$$

Aos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ chamamos os **coeficientes** da combinação linear e a $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ a **sequência dos coeficientes** da combinação linear.

OBSERVAÇÃO: Concluir que um vector *v* de um espaço vectorial *E* é combinação linear de vectores $u_1, \cdots, u_r$ de *E* é um problema que, frequentemente, se reduz a verificar que um sistema de equações lineares é possível. Se o sistema é determinado, tal equivale a a firmar que *v* é combinação linear de $u_1, \cdots, u_r$ sendo, neste caso, únicos os coeficientes da combinação linear.

Seja *E* um espaço vectorial e $u_1, \cdots, u_r$ elementos de *E*. O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \cdots, u_r$, isto é

$$\{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}$$

é um subespaço de *E*.

Sejam $u_1, \cdots, u_r$, com $r \in \mathbb{N}$, elementos de um espaço vectorial E. chamamos **subespaço** (de E) **gerado** pela sequência $(u_1, \cdots, u_r)$ ou pelos vectores $u_1, \cdots, u_r$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \cdots, u_r$. Tal subespaço é frequentemente denotado por

$$\langle u_1, \cdots, u_r \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$$

Se $F = \langle u_1, \cdots, u_r \rangle$ dizemos, ainda, que $u_1, \cdots, u_r$ **geram** *F*, que $u_1, \cdots, u_r$ são **geradores** de *F* ou que a sequência $(u_1, \cdots, u_r)$é **geradora** de *F*.

Dizemos que um espaço vectorial é **finitamente gerado** se existirem $r \in \mathbb{N}$ e $u_1, \cdots, u_r \in E$ tais que:

$$E = \langle u_1, \cdots, u_r \rangle$$

Seja *E* um espaço vectorial e sejam $u_1, \cdots, u_r$ e $v_1, \cdots, v_s$ vectores de *E*. Tem-se:

1. $\langle u_1, \cdots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$ se, e só se, para qualquer $i \in \{1, \cdots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \cdots, v_s$.
2. $\langle u_1, \cdots, u_r \rangle = \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$ se, e só se, para qualquer $i \in \{1, \cdots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \cdots, v_s$ e para qualquer $j \in \{1, \cdots, s\}$, v_j é combinação linear dos vectores $u_1, \cdots, u_r$.

Se $u_1, \cdots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial *E* e se existe $i \in \{1, \cdots, r\}$ tal que u_i é combinação linear restantes $r-1$ vectores então

$$\langle u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \cdots, u_r \rangle = \langle u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_r \rangle$$

Seja $S = (u_1, \cdots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial *E* sobre $\mathbb{K}$ e seja $S' = (u'_1, \cdots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos seguintes tipos:

I. Troca das posições, na sequência, dos vectores u_i e u_j, com $i \neq j$.

II. Multiplicação do vector u_i, $i \in \{1, \cdots, r\}$, por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

III. Substituição do vector u_i, $i \in \{1, \cdots, r\}$, por $u_i + \beta u_j$, $j \in \{1, \cdots, r\}$, com $j \neq i$ e $\beta \in \mathbb{K}$

Tem-se

$$\langle u_1, \cdots, u_r \rangle = \langle u'_1, \cdots, u'_r \rangle$$

4.4 – Dependência e independência linear

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \cdots, u_r \in E$, com $r \in \mathbb{N}$.

- Para $r = 1$, dizemos que a sequência (u_1) ou que o vector u_1 é **linearmente dependente** quando $u_1 = 0_E$
- Para $r \geq 2$, dizemos que $(u_1, \cdots, u_r)$ é uma sequência **linearmente dependente**, ou que os vectores $u_1, \cdots, u_r$ são linearmente dependentes, quando pelo menos um dos vectores é combinação linear dos restantes vectores

A uma sequência $(u_1, \cdots, u_r)$ que não é linearmente dependente chamamos **linearmente independente**, e dizemos que os vectores $u_1, \cdots, u_r$ são linearmente independentes.

Esta definição, no caso particular de r=2, permite afirmar que uma sequência com dois vectores é linearmente dependente se, e só se, uma dos vectores é um **múltiplo escalar** do outro vector, isto é, se é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.

Critério de independência linear – Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \cdots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \cdots, u_r$ são **linearmente independentes** se, e só se, a única forma de escrever 0_E como combinação linear de $u_1, \cdots, u_r$ é tomando todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero. É o mesmo que afirmar que os vectores $u_1, \cdots, u_r$ são **linearmente dependentes** se, e só se, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ não todos nulos (isto é que pelo menos um seja não nulo) tais que $\alpha u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$.

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \cdots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \cdots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se, para todo o vector que seja combinação linear de $u_1, \cdots, u_r$ são únicos os coeficientes da combinação linear.

Seja $S = (u_1, \cdots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \cdots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos tipos I, II ou III do capítulo 4.3 . Tem-se, S é linearmente dependente (respectivamente independente) se, e só se, S' é linearmente dependente (respectivamente, independente).

4.5 – Base e dimensão

Seja E um espaço vectorial e $(u_1, \cdots, u_r)$ uma sequência de vectores de E. Dizemos que $(u_1, \cdots, u_r)$ é uma **base** de E se é uma sequência geradora de E e é linearmente independente. Convencionamos que se $E = \{0_E\}$ então a sequência vazia é base de E.

Num espaço vectorial E finitamente gerado qualquer sequência geradora de E tem um número de vectores superior ou igual ao número de vectores de qualquer sequência linearmente independente.

O que implica que se um espaço vectorial E admite uma base com n elementos, então todas as bases de E têm n elementos.

Seja E um espaço vectorial que admite uma base com n elementos, com $n \in \mathbb{N}$. dizemos então que E tem **dimensão** n e escrevemos $\dim E = n$.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Tem-se:

1. Qualquer sequência de vectores de E com um número de vectores inferiores a n não é geradora de E;

2. Qualquer sequência de vectores de *E* com um número de vectores superior a n não é linearmente independente

Seja *E* um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\dim E = n$
2. Existe uma sequência geradora, com n vectores de *E*, e qualquer sequência geradora de vectores de *E* tem, no mínimo, n elementos.
3. Existe uma sequência linearmente independente, com n vectores de E, e qualquer sequência linearmente independente de vectores de E tem, no máximo, n elementos.

Seja *E* um espaço vectorial e sejam $u_1, \cdots, u_n$ vectores de E. Tem-se $(u_1, \cdots, u_n)$ é uma **base** de E se, e só se, todo o vector de E é combinação linear dos vectores $u_1, \cdots, u_n$ e são únicos os coeficientes da combinação linear.

Sejam E um espaço vectorial sobre K e $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ uma base de E. Para cada $v \in E$, aos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ chamamos as **coordenadas** de v na base $\mathcal{B}$ e a $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ a **sequência das coordenadas** de v na base $\mathcal{B}$

Designamos por **base canónica** de $\mathbb{K}^n$, e representamos por $b.c.\mathbb{K}^n$, a base $(e_1, \cdots, e_n)$ sendo $e_i, i = 1, \cdots, n$ o n-uplo com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1.

Se $S = (v_1, \cdots, v_s)$ é uma sequência geradora de um espaço vectorial E então existe uma subsequência de S que é uma base de E.

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \cdots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Se $v \in E$ é tal que não é combinação linear dos vectores $u_1, \cdots, u_r$ então $u_1, \cdots, u_r, v$ são linearmente independentes, $\langle u_1, \cdots, u_r \rangle \subsetneq \langle u_1, \cdots, u_r, v \rangle$.

Teorema do completamento – Se $S = (u1, \cdots, u_r)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial E de dimensão n então existe uma base E de tem S como subsequência. Tal corresponde afirmar que existem vectores $w_1, \cdots, w_[n - r$ de E, com $n - r \geq 0$ tais que $(u_1, \cdots, u_r, w_1, \cdots, w_{n-r}$ é uma base de E.

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Se F é um subespaço de E então existe um subespaço G de E tal que $E = F \oplus G$ isto é, todo o subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita tem um suplementar.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Tem-se:

1. Qualquer sequência geradora de E com n vectores é uma base de E.
2. Qualquer sequência linearmente independente de n vectores de E é uma base de E.

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita.Tem-se:

1. Se F é um subespaço de E então $dimF \leq dimE$
2. Se F é um subespaço de E e dim F = dim E então F=E

4.6 – Teorema das dimensões

Seja E um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e sejam F e G subespaços de E tais que $F = \langle u_1, \cdots, u_r \rangle$ e $G = \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$. Tem-se:

1. $F + G = \langle u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s \rangle$.
2. Se $(u_1, \cdots, u_r)$ e $(v_1, \cdots, v_s)$ são sequências linearmente independentes então a sequência $(u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s)$ é linearmente independente se, e só se, $F \cap G = \{0_E\}$.

Teorema das dimensões – Se E é um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e F e G são subespaços de E de dimensão finita então F+G e $F \cap G$ têm dimensão finita e $dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$

Se F e G são subespaços de dimensão finita de um espaço vectorial E são equivalentes as afirmações:

1. $F \cap G = \{0_E\}$

2. $dim(F \cap G) = 0$

3. $dim(F+G) = dimF + dimG$

4.7 – Matrizes e espaços vectoriais

As linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes.

As matrizes são muito úteis para resolver os principais problemas deste capítulo, nomeadamente determinar:

1. Se uma sequência de vectores é linearmente independente

   A sequência $(u_1, \cdots, u_p)$ é linearmente independente se, e só se, $r\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = p$

2. Se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores

   $v \in \langle u_1, \cdots, u_p \rangle$ se, e só se $r\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ v \end{bmatrix}\right)$

3. Uma base de um espaço a partir de uma sequência geradora

   Se $F = \langle u_1, \cdots, u_p \rangle$ e $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[linhas]{} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (f.e)$ com $u'_1, \cdots, u'_s$ não nulos, então a sequência $(u'_1, \cdots, u'_s)$ é uma base de F.

4. Uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Seja $(u_1, \cdots, u_p)$ uma sequência linearmente independente de vectores de um subespaço F de $\mathbb{K}^n$ com dim F=s e seja $(w_1, \cdots, w_s)$ uma base de F. Se $\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_s \end{bmatrix} = W'(f.e.)$ e $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_p \end{bmatrix} = U'(f.e.)$ então consideram-se as $s-p$ linhas de W', $w'_i1, \cdots, w'_{is-p}$, com pivôs em índices de coluna distintos dos da matriz U'. Nestas condições a sequência $u'_1, \cdots, u'_p, w'_{i1}, \cdots, w'_{is-p})$ é uma base de F e, portanto, o mesmo sucede a $(u_1, \cdots, u_p, w'_{i1}, \cdots, w'_{is-p})$.

5. Se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

   Sejam $(u_1, \cdots, u_p)$ e $(v_1, \cdots, v_q)$ sequências de vectores de $\mathbb{K}^n$. Se $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} U''(f.e.r.)$ e $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} V''(f.e.r.)$ então $\langle u_1, \cdots, u_p \rangle = \langle v_1, \cdots, v_q \rangle$ se, e só se, são iguais as linhas não nulas das matrizes U" e V".

4.8 – Mais sobre a característica de uma matriz

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Designamos por **espaço das linhas** de A, e representamos por $\mathcal{L}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas m linhas de A.

O subespaço vectorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas n linhas de A é designado por **espaço das colunas** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$.

Às dimensões dos subespaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ chamamos, respectivamente, **característica de linha** de A e **característica de coluna** de A.

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes equivalentes por linhas. Por cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, seja A_i a coluna i de A e seja B_i a coluna i de B. Se existem $k, j_1, \cdots, j_s \in \{1, \cdots, n\}$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ tais que $A_k = \alpha_1 A_{ji} + \cdots + \alpha_s A_{js}$ então $B_k = \alpha_1 B_{j1} + \cdots + \alpha_s B_{js}$.

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ então as colunas $j_1, \cdots, j_t$ de A são linearmente dependentes (respectivamente independentes) se, e só se, o mesmo sucede às colunas $j_1, \cdots, j_t$ de B.

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se:

1. As transformações elementares sobre linhas (respectivamente colunas) não alteram a característica de coluna (respectivemente de linha) de A
2. A característica de linha e a característica de coluna de A são iguais e coincidem com a característica de A, isto é $dim\ \mathcal{L}(A) = dim\ \mathcal{C}(A) = r(A)$.

3. As matrizes A e A^T têm a mesma característica.

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.São equivalentes as afirmações:

1. A característica de A é o número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.
2. A característica de A é a dimensão do espaço das linhas de A
3. A característica de A é a dimensão do espaço das colunas de A
4. A característica de A é o número máximo de linhas linearmente independentes de A
5. A característica de A é o número máximo de colunas linearmente independentes de A

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Designamos por **espaço nulo** de A ou **núcleo** de A, e representamos por $\mathcal{N}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ constituido pelos vectoes que são solução do sistema de equaçoes lineares homogéneo $AX = 0$, isto é, $\mathcal{N}(A) = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K} : A \begin{bmatrix} alpha_1 \\ \vdots \\ alpha_n \end{bmatrix} = 0 \right\}$. À dimensão de $\mathcal{N}(A)$ chamamos **nulidade** de A.

5 – Aplicações lineares

5.1 – Definição, exemplos e propriedades

Dizemos que uma aplicação $f : E \to E'$ é **aplicação linear** (sobre $\mathbb{K}$) se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\forall u, v \in E \; f(u+v) = f(u) \oplus f(v)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \; \forall u \in E \; f(\alpha u) = \alpha \otimes f(u)$

Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. $f(0_E) = 0'_E$
2. $f(-u) = -f(u)$, para qualquer $u \in E$

5.2 – Operações com aplicações

Sendo $f : E \to E'$ e $g : E \to E'$ aplicações arbitrárias chamamos **aplicação soma** das aplicações f e g, e denotamos por $f + g$, à aplicação $f + g : E \to E'$ tal que $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$ para qualquer $u \in E$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f : E \to E'$ uma aplicação arbitrária. Chamamos **aplicação produto de α por f**, e representamos por αf, à aplicação $\alpha f : E \to E'$ tal que $(\alpha f)(u) = (u)$ para qualquer $u \in E$.

Sejam $f : E \to E'$ e $g : E \to E'$ aplicações lineares e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se:

1. $f + g$ é uma aplicação linear
2. αf é uma aplicação linear

Sejam A, B, e C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ aplicações. Chamamos **aplicação composta** de g com f (também designada por "g **após** f"), e representamos por $g \circ f$, à aplicação $g \circ f : A \to C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para qualquer $\alpha \in A$.

A aplicação obtida por composição de duas aplicações lineares é, ainda, uma aplicação linear.

Sejam $f : A \to A$ uma aplicação e $k \in \mathbb{N}_0$. Chamamos **potência de expoente** k de f, e representamos por f^k, à aplicação $f^k : A \to A$ tal que

$$f^k = \begin{cases} id_A, & \text{se } k = 0 \\ f^{k-1} \circ f, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.3 – Imagem e núcleo

Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear. Chamamos **núcleo** de f, e representamos por Nuc f ou Ker f (do inglês "kernel"), ao conjunto $Nucf = u \in E : f(u) = 0_{E'}$.

Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. Nuc *f* é um subespaço de E.
2. Im *f* é um subespaço de E'.

Sejam $f : E \to E'$ uma aplicação linear, W um subespaço de E' e W' um subespaço de E'. Chamamos **imagem de W por *f*** a $f(W) = \{f(u) : u \in W\}$ e **imagem recíproca de W' por *f*** a $f^{\leftarrow}(W') = \{u \in E : f(u) \in W'\}$

A imagem de uma aplicação permite determinar se a aplicação é **sobrejectiva** uma vez que $f : A \to B$ é sobrejectiva se, e só se, $Im\ f = B$.

O núcleo de uma aplicação linear permite determinar se a aplicação é **injectiva**, uma vez que $f : A \to B$ é injectiva se, e só se, $Nuc\ f = \{0_E\}$.

Teorema da dimensão – Se $f : E \to E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $Nuc\ f$ e $Im\ f$também têm dimensão finita e $dim\ E = dim\ Nuc\ f + dim\ Im\ f$.

Se $f : E \to E'$ é uma aplicação linear, e E e E' ambos de dimensão finita, verificam que $dim\ E = dim\ E'$ então são equivalentes as afirmações:

1. f é injectiva;
2. f é sobrejectiva
3. f é bijectiva

5.4 – Aplicações invertíveis e isomorfismos

Seja

5.5 – Matriz de uma aplicação linear

Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear. Sejam $B = (e_1, \cdots, e_n)$ uma base de E e $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$

uma base de E'. Designamos por **matriz de f em relação às bases de B e B'** (por esta ordem) e representamos por $M(f;B,B')$, a matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja coluna j, $j=1,\cdots,n$ é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base B'. Assim

$$f(e_j) = A_{1je'_1} + \cdots + A_{mje'_m} \ j=1,\cdots,n$$

Seja $f: E \to E'$ uma aplicação linear. Sejam B e B' bases arbitrárias de E e E', respectivamente, e $A = M(f;B,B')$. Tem-se $dim\ Im\ f = r(A)$

6 – Valores e vectores próprios

6.1 – Definição, exemplos e propriedades

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **endomorfismo** de E a qualquer aplicação linear de E em E.

Seja $f: E \to E$ uma aplicação linear. Se $u \in E\backslash\{0_E\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ são tais que $f(u) = \alpha u$ dizemos que α é **valor próprio** de f e u é **vector próprio** de f associado ao valor próprio α.

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})\backslash\{0_{n\times 1}\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ são tais que $AX = \alpha X$, dizemos que :

- α é **valor próprio** de A;
- X é **vector próprio** de A associado ao valor próprio α.

Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Ao subespaço vectorial $M_\alpha = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \quad = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\}$ chamamos **subespaço próprio** de A associado ao valor próprio α.
Designamos por **multiplicidade geométrica** do valor próprio α, e representamos por $mg(\alpha)$, a dimensão do subespaço M_α.

O resultado seguinte permite determinar a multiplicidade geométrica de um valor próprio sem determinar o subespaço próprio que lhe está associado. Seja Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Tem-se $mg(\alpha) = n - r(A - \alpha I_n)$

Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ um valor próprio de A. Tem-se, α é **valor próprio** de A se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **polinómio característico** de A, e representamos por $p_A(x)$ou simplesmente $p(x)$ se não houver ambiguidade, ao polinómio na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$ dado por $p(x) = |A - xI_n|$.

À equação $p(x) = 0$ chamamos **equação característica** de A.

Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Designamos por **multiplicidade algébrica** de do valor próprio α e representamos por $ma(\alpha)$, a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A, $p_A(x)$, isto é, o maior inteiro k tal que $(\alpha - x)^k$ divide $p_A(x)$.

Os valores próprios de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. A é invertível;
2. A não tem valor próprio zero;
3. O termo constante do polinómio característico de A é não nulo.