ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 25 de outubro a 4 de novembro de 2024

Hora Limite de Entrega

4 de novembro de 2024, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

  Todas as justificações devem basear-se nos resultados demonstrados no manual da unidade, capítulos 1-3, utilizando a mesma terminologia. Caso contrário, uma solução com outra terminologia ou método não receberá valores.

  Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

A ordem dos questõess na resposta deve corresponder à ordem no enunciado.

O seu e-fólio não deve ultrapassar 14 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega.
Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

Justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

I. (*0,8 val., 0,2 val./questão*) Com justificação, indique se a afirmação é falsa ou verdadeira:

a. Não existe um sistema de equações lineares, com 4 incógnitas, possível e indeterminado com grau de interminação 4.

b. Se $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_{n\times(n-1)}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e a matriz ampliada do sistema de equações lineares $AX = b$ é invertével, então o sistema é impossível.

c. Se (S) é um sistema de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ em que o número de equações é superior ao número de incógnitas, então (S) é impossível.

d. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e o sistema $Ax = 0_{n\times 1}$ é possível, então A é invertível.

II. (*1,4 val.*)

Considere em $\mathbb{R}$ o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + (\alpha+1)z = 1 \\ x + (\alpha+1)y + z = r_2 \\ (\alpha+1)x + y + z = \alpha + 1. \end{cases} \tag{1}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e r_2 consiste nos 2 últimos dígitos do seu número de estudante (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r_2 = 23$).

a. (*1,0 val.*) Determine para quais valores de α o sistema (1) não tem solução, tem uma solução única ou tem infinitas soluções.

b. (*0,4 val.*) Determine a solução do sistema se $\alpha = -2$.

III. (*1,2 val.*) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & r' \\ -1 & \alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e r' consiste nos três últimos dígitos do seu número de estudante mais 1 (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r' = 123 + 1 = 124$).

a. (*0,9 val.*) Determine justificadamente $\det A$ (como aplicação de α)

b. (*0,3 val.*) Usando o resultado de a. determine para que valores de α a matriz A é invertível.

IV. (*0,6 val.*) Seja C uma matriz real quadrada de ordem n e

$$X_k = C^k + C^{k-1} + \cdots + C + I_n,$$

para $k \in \mathbb{N}$. Mostre que:

a. (*0,5 val.*) $X_k - X_kC = I_n - C^{k+1}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$.

b. (*0,1 val.*) se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^{k+1} = 0_{n\times n}$, então X_k e $I_n - C$ são matrizes invertíveis.

Fim