ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre dia 1 de julho de 2022 das 10h00 às 13h00 de Portugal Continental

Data de Limite de Entrega

1 de julho de 2022, até às 13h00 de Portugal Continental

Conteúdos

Álgebra Linear

Competências

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

Trabalho a desenvolver
Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste Exame é de 20 valores.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu Exame na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu Exame não deve ultrapassar 18 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do Exame, segundo o exemplo apresentado: 000000exame.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo Exame até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla. (*4 valores*)

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. • Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira. • Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

Questão 1

Seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde k é o seu nº de estudante da UAb.

Então:

- ☐ a) A_k é invertível.
- ☐ b) $\det A_k = k$.
- ☐ c) $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = k$, onde os λ_i são os valores próprios de A_k.
- ☐ d) A_k é diagonalizável.

Questão 2

Considere $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(ax^2 + bx + c) = (a, b)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $g(a, b) = ax^3$.

Então:

- ☐ a) $\mathrm{Nuc}\, f$ tem dimensão 2.
- ☐ b) $\mathrm{Nuc}\,(g \circ f)$ tem dimensão 2.
- ☐ c) $\mathrm{Nuc}\, f \subseteq \mathrm{Nuc}\,(f \circ g)$.
- ☐ d) $\mathrm{Nuc}\, g \subseteq \mathrm{Nuc}\,(g \circ f)$.

Questão 3

Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 4 tais que $\det A = -1$, $\det B = 2$ e $\det C = 0$.

Então:

- ☐ a) $\det(A + B) = 1$.
- ☐ c) $\det(A + C) = 0$.
- ☐ b) $\det(C - B) = 2$.
- ☐ d) $\det A = \det(-A)$.

Questão 4

Seja $p(x) = -(x-1)(x+1)(x+2022)$ o polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Então:

- ☐ a) A é diagonalizável.
- ☐ b) $A^2 = 0$.
- ☐ c) Os valores próprios de A^{2022} são todos diferentes.
- ☐ d) A não é invertível.

Questões de desenvolvimento

Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*2,5 valores*)

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se 0 é o único valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ então $A = 0$.

b) Se $\{u, v\}$ é uma sequência geradora então a sequência $\{u-v, u+v\}$ também é uma sequência geradora.

III. (*3,5 valores*)

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 12 \\ -2x - 4y + z = -5 \\ -x - 2y + 2z = -1\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade do sistema (1) e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

b) Se na alínea anterior obteve soluções do sistema verifique que são de facto soluções do sistema.

IV. (*4 valores*)

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine o polinómio característico da matriz A.

b) Determine justificadamente os valores próprios da matriz A.

c) Para cada valor próprio da matriz A, determine justificadamente uma base para o seu espaço próprio.

d) Determine justificadamente se é possível obter uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal, e em caso afirmativo indique uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível P tais que $\Lambda = P^{-1}AP$.

V. (*4 valores*)

Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

a) Determine justificadamente a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$ e $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Determine justificadamente o núcleo e a imagem de T.

c) Determine justificadamente se T é injetiva, e se T é sobrejetiva.

d) Determine justificadamente polinómios $p \in \mathbb{R}_3[x]$ tais que $Tp = x^2 + x + 1$.

VI. (*2 valores*)

Mostre justificadamente que se A e B são matrizes quadradas invertíveis de ordem n então os valores próprios de $A^{-1}BA$ e de ABA^{-1} são os mesmos.

FIM