U.C. 21002 — Álgebra Linear I
Atividade Formativa 1

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo.

1. Considere as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

☐ **a)** $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $A - C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $C + I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Sendo $X = (x, y, z)^\mathsf{T}$, pode-se escrever este sistema na forma $AX = b$, onde A e b são, respetivamente:

☐ **a)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Seja $n \geqslant 2$ e considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Então, é sempre verdade que:

☐ **a)** Se $AX = 0$, então $A = 0$ ou $X = 0$.

☐ **b)** Se $AX = BX$, então $A = B$.

☐ **c)** Se $AX = AY$, então $X = Y$.

☐ **d)** Se $A^\mathsf{T} X = 0$, então $X^\mathsf{T} AB = 0$.

4. Se A é uma matriz quadrada $(n \times n)$ que satisfaz $I_n = A + A^2 + A^3$, então pode-se concluir que:

☐ **a)** A não é invertível.

☐ **b)** A é invertível e $A^{-1} = \frac{I_n}{\det A}$.

☐ **c)** A é invertível e $A^{-1} = I_n + A + A^2$.

☐ **d)** A é invertível e $A^{-1} = 1 + A + A^2$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$, determine os valores de $a \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e, para esses valores, calcule A^{-1}.

III. Utilizando o Teorema de Laplace determine o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

IV. Recorrendo à regra de Cramer, calcule a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ -x + y + 3z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4 \end{cases}$$

V. Seja N_n a matriz quadrada de ordem n definida por

$$(N_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Escreva explicitamente as matrizes N_n nos casos $n = 2, 3, 4, 5$.

b) Calcule N_n^k, para $k \in \mathbb{N}$, e determine os valores de $r(N_n^k)$.

c) Determine a forma geral das matrizes que comutam com N_n, para $n = 2$ e $n = 3$. Conjeture o resultado para N_n geral.

VI. Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto de todos os polinómios, de qualquer grau, na variável real x. Mostre que $\mathbb{R}[x]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathbb{R}_{\text{par}}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ o subconjunto constituido apenas pelos polinómios de ordem par, e $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ o subconjunto constituido apenas pelos polinómios de ordem ímpar. Será $\mathbb{R}_{\text{par}}[x]$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$? E $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x]$?

FIM

RESOLUÇÃO

As resoluções que se seguem são feitas com algum detalhe, por vezes maisor que o necessário, de modo a que possam constituir úteis materiais de aprendizagem. Em particular, nas questões de escolha múltipla, para as quais apenas seria necessário escolher a opção correta, apresentam-se, também, os cálculos necessários à sua obtenção.

I. 1. Neste exercício podemos começar logo por inspecionar as várias opções de modo a verificar se existirão algumas que possam ser liminarmente eliminadas. Para tal, as de inspeção mais fácil são as correspondentes à operação de adição e subtração, i.e., as alíneas b) e c), pois esta operação é muito mais fácil do que a operação de multiplicação presente nas outras duas alíneas.

A opção b) pode ser eliminada sem efetuar qualquer cálculo: as matrizes A e C têm dimensões diferentes (2×3 e 2×2, respetivamente) pelo que não podem ser subtraidas.

Quanto à opção c) tem-se $C + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, pelo que também não é esta a hipótese correta.

Vejamos agora as restantes opções: temos de calcular C^2 numa delas e BA noutra. Como C é uma matriz 2×2, o cálculo de C^2 deverá ser o fácil:

$$C^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos, portanto, que a alínea a) também não é a opção correta. Como sabemos que uma (e apenas uma) das hipóteses está correta, a resposta terá de ser: alínea d).

2. Ao pretender escrever o sistema de equações na forma matricial $AX = b$, sendo o vetor das incógnitas $X = (x, y, z)^\mathsf{T}$, o qual pode ser identificado com uma matriz 3×1, é evidente que a matriz A tem de ter 3 colunas (caso contrário não poderia ser multiplicado pela matriz X, questtem 3 linhas). Esta observação elimina a opção dada na alínea a), sem fazer qualquer cálculo.

Como existem três equações no sistema, a matriz A terá de ter três linhas. Já tendo, no parágrafo anterior, concluido que A tem também de ter 3 colunas. Portanto, a operação AX resultará em

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix}.$$

Como as linhas de AX correspondem, linha por linha, aos membros esquerdos das linhas do sistema dado, concluímos que $a_{11} = 3$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 0$, etc., pelo uma inspeção das matrizes das diversas opções permite-nos concluir imediatamente que a opção correta é a alínea c).

Um outro modo de resolução que normalmente acarreta menos (ou mesmo nenhuns) cálculos, é o de "completar" o sistema dado escrevendo zeros nos coeficientes dos termos correspondentes às variáveis que deviam lá estar mas não estão. Por exemplo, no nosso caso isto resulta em:

$$\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 2x-z=0 \\ y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+0z=2 \\ 2x+0y-1z=0 \\ 0x+1y+1z=-1 \end{cases}$$

Os coeficientes nos membros esquerdos deste sistema correspondem (na mesma ordem) aos elementos da matriz A, e os membros direitos correspondem ao vetor b, pelo que se conclui imediatamente que a resposta correta é a c).

Convém ter em atenção que tudo o que se escreveu acima pressupõe que o vetor das incógnitas X é definido como no enunciado, ou seja, $X=(x,y,z)^\top$. Se o vetor das incógnitas fosse outro, por exemplo se $X=(z,x,y)^\top$, a matriz A seria também outra (obtida da anterior por uma troca apropriada de *colunas*).

3. Para responder a esta questão consideremos sucessivamente as diversas afirmações nela feitas e vejamos se conseguimos provar que são verdadeiras, ou encontrar um (contra-)exemplo que mostre que são falsas.

   Começando pela alínea a), com o que já sabemos sobre matrizes deverá ser claro que $AX=0$ não implica que ou a matriz A, ou X, tenha de ser nula. Porquê? não sendo muito rigoroso, digamos que a principal razão é que temos demasiados graus de liberdade (elementos de A e de X) e não precisamos que todos eles sejam nulos para que o resultado seja zero. Por exemplo: se X tiver apenas um elemento não nulo (digamos, na terceira linha) e a correspondente coluna de A for nula, então $AX=0$ embora $A\neq 0$ e $X\neq 0$; para ficar mais claro, concretizemos com um exemplo de dimensão quatro: sendo $*$ qualquer número diferente de zero, tem-se sempre

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Portanto, a afirmação na alínea a) é falsa.

   A afirmação na alínea b) é, obviamente, falsa em geral: por exemplo, se $X=0$ então, quaisquer que sejam as matrizes A e B em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem-se sempre $AX=BX$ mesmo quando $A\neq B$.

   O mesmo exemplo que foi utilizado no estudo da alínea a) serve também para concluirmos que a afirmação na alínea c) é falsa: tomando a matriz desse exemplo $A=\begin{bmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix}$, seja $X=(0,0,1,0)^\top$ e $Y=(0,0,-1,0)^\top$. Obviamente que $AX=AY$ (porque ambos são iguais a zero, como vimos acima) mas $X\neq Y$.

   Tendo chegado a este ponto concluimos, por exclusão de partes, que a alínea d) tem de ser a verdadeira. mesmo não sendo necessário mais nada para completar a resposta, estudemos este caso:

Tomando por hipótese que $A^\top X = 0$, queremos concluir que também $X^\top AB = 0$, e isto para quaisquer matrizes A, B, X como no enunciado. Olhando para a hipótese e para a tese (o que queremos concluir) deveremos reparar que numa temos $A^\top X$ e na outra $X^\top A$. Isto deveria relembrar-nos imediatamente das propriedades da transposição, nomeadamente $(UV)^\top = V^\top U^\top$ e $\left(U^\top\right)^\top = U$. Recorrendo a estes resultados tem-se $X^\top A = \left((X^\top A)^\top\right)^\top = \left(A^\top (X^\top)^\top\right)^\top = \left(A^\top X\right)^\top = 0^\top = 0$, onde se usou a nossa hipótese de partida na penúltima igualdade. Mas então $X^\top AB = 0B = 0$, que é o resultado que pretendiamos concluir.

4. Observando que $I_n = A(I_n + A + A^2)$ e também $I_n = (I_n + A + A^2)I_n$, concluímos imediatamente que A é invertível e que a sua inversa é $I_n + A + A^2$. A opção correta é, portanto, d).

II. Na aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan, usaremos a seguinte notação: $U \xrightarrow[\ell_j \mapsto \alpha\ell_j + \beta\ell_k]{} V$ quer dizer que V é obtida substituindo a linha ℓ_j de U por $\alpha\ell_j + \beta\ell_k$.

Procedamos, então, à eliminação de Gauss-Jordan de $[A|I_3]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \mapsto \ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \mapsto \frac{1}{1+a^2}\ell_3]{}$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \mapsto \frac{1}{1+a^2}\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \mapsto \ell_1 - a^2\ell_3]{}$$

$$\xrightarrow[\ell_1 \mapsto \ell_1 - a^2\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a^2}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{array}\right]$$

Concluimos, daqui, que a matriz A é invertível para todos os $a \in \mathbb{C}$ tais que $1 + a^2 \neq 0$, ou seja, sempre que $a \neq \pm i$, sendo, nestes casos, a sua inversa a matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a^2}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

Quando $1 + a^2 = 0$ a matriz é equivalente por linhas à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(que é a matriz obtida na primeira etapa da eliminação de Gauss). Como esta matriz tem uma linha nula, não é invertível e, portanto, A também não o será.

III. Para facilidade de notação escreveremos $\det(X) = |X|$.

Como as linhas e colunas de ordem par (as segundas e quartas) têm o maior número de elementos iguais a zero, convém aplicar o teorema a uma delas. Optamos por aplicá-lo à segunda linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Agora, é natural expandir cada um dos determinantes no segundo membro ao longo da quarta linha (ou coluna) de cada um deles, pois é essa a que tem a maior quantidade de elementos nulos. Fazendo isso obtém-se

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Agora expandindo o determinante obtido de um qualquer modo (são todos equivalentes em termos de esforço de computação, já que a matriz em causa não tem qualquer elemento nulo e os números são todos inteiros e pequenos) conclui-se que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-1) = 2,$$

pelo que o valor do determinante dado no enunciado é igual a $2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 2 = -2$.

IV. Comecemos por calcular os determinantes envolvidos na aplicação da regra de Cramer. O determinante da matriz do sistema:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -23$$

O determinante da matriz do sistema quando se substitui a primeira coluna pelo vetor dos termos independentes:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 17$$

Idem, para a segunda coluna:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -25$$

Idem, para a terceira coluna:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -9$$

Aplicando a regra de Cramer tem-se, então,

$$x = -\frac{17}{23}, \quad y = \frac{25}{23}, \quad z = \frac{9}{23}$$

V. a) Atendendo à definição dada tem-se que, numa dada linha i, o único elemento da matriz que não é nulo é o que se situa na coluna $i+1$ (e se a linha for a última, n, não haverá elemento não nulo, visto que só há n colunas). Portanto:

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Comecemos por ver o que se passa com N_2: Calculando a multiplicação de N_2 por si próprio tem-se

$$N_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Experimentando agora com N_3 tem-se

$$N_3^2 = N_3 N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$N_3^3 = N_3^2 N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

Mais uma vez, agora para N_4:

$$N_4^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$N_4^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$N_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Destas experiências podemos conjeturar que ao multiplicar N_n por si própria uma vez faz "subir a diagonal" de 1s para uma diagonal acima e, portanto, se tivermos um produto de k fatores iguais a N_n, a diagonal de 1s deverá "deslocar-se" $k-1$ diagonais para cima. Em particular, no caso da potência n da matriz N_n (que tem

$n-1$ diagonais acima da diagonal principal) a diagonal de 1s terá "desaparecido" e a matriz resultante é a matriz nula.

A observação acima, inspirada nas experiências com N_2, N_3 e N_4 feitas anteriormente, não é, obviamente, uma demonstração rigorosa; mas pode (e deve) servir-nos de guia. Pretendemos, então, concluir quer

$$(N_n^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Provemos este resultado por indução em k:

Para $k=1$ nada há a provar: é a definição das matrizes N_n.

Suponhamos que a expressão é válida para $k=K$, para um determinado $K>1$ fixo arbitrariamente. pretendemos então provar que isto implica que a expressão com $k=K+1$ é também válida.

Mas $N_n^{K+1} = N_n^K N_n$ e portanto, usando a definição de multiplicação de matrizes e o que sabemos sobre as expressões de N_n e de N_n^K, pode conclui-se que

$$\begin{aligned} \left(N_n^{K+1}\right)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(N_n^K\right)_{i\ell} \left(N_n\right)_{\ell j} = \left(N_n^K\right)_{i,i+K} \left(N_n\right)_{i+K,j} = \left(N_n\right)_{i+K,j} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+K+1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos concluir.

Claro que se tem $N_n^k = 0$ para $k \geqslant n$.

Da expressão que obtivemos para os elementos de N_n^k é também claro que todos os elementos das primeiras k colunas são nulos (porque quando $j \leqslant k < 1+k \leqslant i+k$ tem-se $(N_n^k)_{ij} = 0$), o que também ocorre com todos os elementos das últimas k linhas da matriz (porque, se $n-(k-1) \leqslant i \leqslant n$, tem-se $i+k \geqslant n-(k-1)+k = n+1 > n$ e, portanto, todos os elementos dessas linhas são nulos: os elementos diferentes de zero teriam de estar nas colunas $j=i+k$, o que é impossível porque $i+k>n$ e a matriz só tem n colunas, por ser de ordem n). As restantes $n-k$ linhas e colunas têm um (e apenas um) elemento diferente de zero: o que está localizado na posição $(i, i+k)$. Estes resultados poderiam ser também facilmente inferidos por observação dos exemplos com $n=2,3,4$ que apresentámos anteriormente, embora, naturalmente, a confirmação do intuido por observação dos exemplos necessitasse sempre de um argumento rigoroso do tipo que foi desenvolvido.

Do que foi feito conclui-se que $r(N_n) = n-k$, se $k \leqslant n$, e $r(N_n^k) = 0$, se $k > n$.

c) Comecemos por considerar o caso com $n=2$. Pretendemos determinar a forma geral das matrizes 2×2 que comutam com N_2, ou seja, determinar os valores de a, b, c e d para os quaisquer

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, tem de se ter $a = d$ e $c = 0$, não havendo restrições sobre b, ou seja, as matrizes que comutam com N_2 são do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Vejamos agora o caso com $n = 3$. Tal como no caso anterior:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, tem de se ter $g = g = h = 0$, $a = e = i$ e $b = f$, não havendo restrições sobre c. isto permite concluir que as matrizes que comutam com N_3 são do tipo

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

destes dois exemplos é natural conjeturar que as matrizes que comutam com N_n são as matrizes triangulares superiores do tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \end{bmatrix},$$

onde $a_1, \dots, a_n$ são números complexos arbitrários. A confirmação de que esta conjetura é válida (i.e., a sua demonstração) não é pedida no enunciado, pelo que não será feita.

VI. Sejam $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ e $q_m(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$ dois elementos de $\mathbb{R}[x]$, o primeiro de grau n e o segundo de grau m. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dois reais darbitrários. Para provar que $\mathbb{R}[x]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ necessitamos de verificar que $\alpha p + \beta q$ é também um elemento de $\mathbb{R}[x]$, onde a multiplicação por escalares e a adição de polinómios são feitas pontualmente (i.e., para cada valor fixo da variável $x \in \mathbb{R}$) e adicionando monómios do mesmo grau, ou seja, $\alpha \cdot a_j x^j = (\alpha a_j) x^j$ e $a_j x^j + b_j x^j = (a_j + b_j) x^j$. Considere-se, então, um polinómio p de grau n e um polinómio q de grau m. Sem perda de generalidade, seja $m \leqslant n$. Então, é óbvio da definição das operação em causa que $\alpha p + \beta q$ é também um polinómio de grau não superior a n (poderá ter grau ,*inferior* a n se os coeficientes apropriados se cancelarem, por exemplo: com $\alpha = 1, \beta = -1, p(x) = x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^2 + 2$ tem-se que p e q têm grau 2 mas $\alpha p(x) + \beta q(x) = x - 1$ tem grau $1 < 2$).

Quanto à questão de saber se $\mathbb{R}_{\text{par}}[x]$ e $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x]$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}[x]$, a observação feita no final do parágrafo anterior sobre o facto do grau dos polinmios obtidos por combinações lineares de outros polinómios poder ser inferior aos dos polinómios originais deverá já ter apontado para a resposta correta: $\mathbb{R}_{\text{par}}[x]$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$ pois a combinação linear de dois polinómios de grau par pode ser um polinómio de grau ímpar: no exemplo considerado a diferença de dois polinómios de grau 2 resultou num polinómio de grau 1. Analogamente, $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x]$ também não é um subespaço linear de $\mathbb{R}[x]$, conseguindo-se um contra-exemplo com uma alteração trivial do caso considerado anteriormente: com $\alpha = 1, \beta = -1, p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^3 + 1$, tem-se $\alpha p(x) + \beta q(x) = x^2 + x$.