

Resolução

Grupo I

1.1.

Dado $x = 3.14159265$ e a aproximação $x_{\text{prox}} = 3.1416$, como x_{prox} está arredondado às 4 casas decimais, o erro absoluto máximo é metade da unidade na 4ª casa decimal:

$$\epsilon_{\text{LS}} = (1/2) \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}$$

Com três algarismos significativos:

$$\epsilon_{\text{LS}} = 5.00 \times 10^{-5}$$

O erro relativo é $r = |x - x_{\text{prox}}| / |x|$. Assim, um limite superior é:

$$r_{\text{LS}} = \epsilon_{\text{LS}} / |x| = (5 \times 10^{-5}) / 3.14159265 \approx 1.59 \times 10^{-5}$$

Com três algarismos significativos:

$$r_{\text{LS}} = 1.59 \times 10^{-5}$$

Para justificar os algarismos significativos, x_{prox} tem t algarismos significativos corretos se:

$$|x - x_{\text{prox}}| / |x| < (1/2) \times 10^{-t}$$

Como $r_{\text{LS}} = 1.59 \times 10^{-5}$:

Para $t = 4$: $(1/2) \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}$ e $1.59 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5} \Rightarrow$ garante 4 algarismos significativos.

Para $t = 5$: $(1/2) \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$ e $1.59 \times 10^{-5} > 5 \times 10^{-6} \Rightarrow$ não garante 5.

Conclui-se assim que $x_{\text{prox}} = 3.1416$ tem 4 algarismos significativos.

1.2

Dada $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$.

Derivadas:

$$f'(x) = 1/(1 + x)$$

$$f''(x) = -1/(1 + x)^2$$

$$f'''(x) = 2/(1 + x)^3$$

Em $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 2$$

Polinómio de Taylor de grau 3:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + (f''(0)/2)x^2 + (f'''(0)/6)x^3$$

Logo:

$$p_3(x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3$$

Conclui-se que:

$$p_3(x) = x - x^2/2 + x^3/3$$

1.3

Limite superior para o erro de $f(0.1) \approx p_3(0.1)$, usando o resto de Lagrange do polinómio de Taylor de grau 3 em torno de $x_0 = 0$.

Resto de Lagrange:

$$R_3(x) = (f''''(\xi)/4!)*x^4, \text{ com } \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Para $f(x) = \ln(1 + x)$:

$$f'(x) = 1/(1 + x)$$

$$f''(x) = -1/(1 + x)^2$$

$$f'''(x) = 2/(1 + x)^3$$

$$f''''(x) = -6/(1 + x)^4$$

$$\text{Logo, } |f''''(x)| = 6/(1 + x)^4.$$

Para $x = 0.1$, temos $\xi \in (0, 0.1)$. No intervalo $[0, 0.1]$, $(1 + \xi)^4 \geq 1$, portanto:

$$|f''''(\xi)| = 6/(1 + \xi)^4 \leq 6.$$

Assim,

$$|R_3(0.1)| \leq (6/4!)(0.1)^4$$

$$= (6/24)10^{-4}$$

$$= 0.2510^{-4}$$

$$= 2.510^{-5}$$

Conclui-se que:

$$|f(0.1) - p_3(0.1)| \leq 2.50 \times 10^{-5}$$

Grupo II

2.1

Considere-se $f(x) = x^2 - \cos(x)$. Como é soma/diferença de funções contínuas, f é contínua

em $[0,1]$.

Existência de raiz (TVI):

$$f(0) = 0^2 - \cos(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - \cos(1). \text{ Como } \cos(1) \approx 0.5403, \text{ então } f(1) \approx 0.4597 > 0.$$

Logo $f(0) \cdot f(1) < 0$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe pelo menos uma raiz em $(0,1)$, portanto em $[0,1]$.

Unicidade:

$$f'(x) = 2x + \sin(x). \text{ Para } x \in [0,1], \text{ tem-se } 2x \geq 0 \text{ e } \sin(x) \geq 0, \text{ e para } x > 0 \text{ resulta } f'(x) > 0.$$

Assim, f é estritamente crescente em $[0,1]$, pelo que só pode ter uma raiz nesse intervalo.

Conclui-se que a raiz em $[0,1]$ é única.

2.2

Para $f(x) = x^2 - \cos(x)$, tem-se $f'(x) = 2x + \sin(x)$.

Método Newton: $x(k+1) = x(k) - f(x(k)) / f'(x(k))$.

Com $x_0 = 0.5$:

$k=0$:

$$f(x_0) = 0.5^2 - \cos(0.5) = 0.25 - \cos(0.5) \approx -0.6275825619$$

$$f'(x_0) = 2 \cdot 0.5 + \sin(0.5) = 1 + \sin(0.5) \approx 1.4794255386$$

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0.5 - (-0.6275825619)/1.4794255386 \approx 0.9242069273$$

$k=1$:

$$f(x_1) \approx 0.2516906771$$

$$f'(x_1) \approx 2.6465570681$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) \approx 0.9242069273 - 0.2516906771/2.6465570681 \approx 0.8291057560$$

Tabela: $k \mid x_k \mid f(x_k) \mid f'(x_k)$

0 $\mid$ 0.5000000000 $\mid$ -0.6275825619 $\mid$ 1.4794255386

1 $\mid$ 0.9242069273 $\mid$ 0.2516906771 $\mid$ 2.6465570681

2 $\mid$ 0.8291057560 $\mid$ 0.0118809738 $\mid$ 2.3955390845

2.3

Da alínea anterior, $x_2 \approx 0.8291057560$ e $f(x_2) \approx 0.0118809738$.

Assim, o erro residual é:

$$|f(x_2)| \approx 0.0118809738 \approx 1.19 \times 10^{-2}.$$

Quanto à convergência: observa-se diminuição do residual ao longo das iterações:

$$|f(x_0)| \approx 0.628, |f(x_1)| \approx 0.252 \text{ e } |f(x_2)| \approx 0.0119.$$

A redução torna-se muito acentuada na 2.^a iteração, o que é compatível com a convergência rápida do Método de Newton, tipicamente quadrática quando se está suficientemente perto da raiz.

Grupo III

3.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriz aumentada:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}$$

Pivotagem parcial na coluna 1: maior $| \cdot |$ é 2 (linha 2). Troco $L_1 \leftrightarrow L_2$.

Vetor de permutação: $p = (2, 1, 3)$. Fica:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}$$

Eliminação:

$$m_{21} = 1/2: L_2 = L_2 - (1/2)L_1 \Rightarrow L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$m_{31} = -1/2: L_3 = L_3 + (1/2)L_1 \Rightarrow L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

Fica:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & -2 & 3/2 & 7/2 \end{array}$$

Pivotagem na coluna 2 (linhas 2-3): maior $| \cdot |$ é 2 (linha 3). Troco $L_2 \leftrightarrow L_3$.

Vetor de permutação: $p = (2, 3, 1)$. Fica:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}$$

Eliminação:

$$m_{32} = 1/(-2) = -1/2: L_3 = L_3 + (1/2)L_2$$

$$(1/2)L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/4 & 7/4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3/2 & 7/2 \end{array}$$

$$0 \ 0 \ 1/4 \mid 1/4]$$

Retrosubstituição:

$$(1/4)x_3 = 1/4 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-2x_2 + (3/2)x_3 = 7/2 \Rightarrow -2x_2 + 3/2 = 7/2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow 2x_1 - 2 + 3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

Solução: $x = [1; -1; 1]$

Grupo IV

4.1

$A(1:2,1:2)$ seleciona as linhas 1 a 2 e colunas 1 a 2 de A, logo:

$$A(1:2,1:2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Concatenando com a coluna [5; 6]:

$$[A(1:2,1:2), [5; 6]] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$A(3,:)$ é a 3ª linha de A: $A(3,:) = [-1 \ -3 \ 0]$

Somando [1 1 1]:

$$A(3,:) + [1 \ 1 \ 1] = [0 \ -2 \ 1]$$

Após junção:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2

Em anexo, ficheiro 4.2.cpp

4.3

Em anexo, ficheiro 4.3.cpp

