E-fólio B - proposta de resolução

1. **[0.6 val.]** Prove por indução matemática que

$$\sum_{j=1}^{N}(3j(j+1)) = N(N+1)(N+2),\ \forall N=1,2,3,...$$

Comecemos pela base de indução (caso $N=1$). Temos

$$\sum_{j=1}^{1}(3j(j+1)) = 3\times 1\times 2 = 6 = \underbrace{1}_{N}\times\underbrace{2}_{N+1}\times\underbrace{3}_{N+2},$$

pelo que o resultado é válido quando $N=1$. Agora supomos que a hipótese de indução é válida, isto é, para um dado $N\in\mathbb{N}$ temos

$$\sum_{j=1}^{N}(3j(j+1)) = N(N+1)(N+2)$$

e pretendemos provar que

$$\sum_{j=1}^{N+1}(3j(j+1)) = (N+1)(N+2)(N+3).$$

Temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N+1}(3j(j+1)) &= \sum_{j=1}^{N}(3j(j+1)) + \sum_{j=N+1}^{N+1}(3j(j+1))\\ &= N(N+1)(N+2) + 3(N+1)(N+2) \quad \text{(pela hipótese de indução)}\\ &= (N+1)(N+2)(N+3),\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{j=1}^{N}(3j(j+1)) = N(N+1)(N+2),\ \forall N=1,2,3,...$$

como pretendíamos provar.

2. **[1.4 val.]** Considere a seguinte sucessão:

$$\begin{cases} x_0 = 5\\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+9}{2x_n} \quad n=0,1,2,... \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Prove que $x_n \geq 3,\ \forall n = 0, 1, 2, ...$

Iremos provar este resultado por indução matemática.

Para $n = 0$, temos $x_0 = 5 \geq 3$. Vamos agora supor que, para um dado $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n \geq 3$ e pretendemos provar que também $x_{n+1} \geq 3$. Notamos que

$$x_{n+1} \geq 3 \iff x_{n+1} - 3 \geq 0$$

e, pela definição da sucessão isto é equivalente a provar que

$$\frac{x_n^2 + 9}{2x_n} - 3 \geq 0. \tag{1}$$

Como por hipótese de indução temos $x_n \geq 3$, então o denominador em (1) nunca se anula, pelo que a divisão está bem definida. Agora temos que

$$\frac{x_n^2 + 9}{2x_n} - 3 = \frac{x_n^2 + 9 - 6x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - 3)^2}{2x_n}.$$

Como $(x_n - 3)^2 \geq 0$ e $x_n \geq 3 > 0$, então

$$\frac{x_n^2 + 9}{2x_n} - 3 \geq 0,$$

logo $x_n \geq 3 \Rightarrow x_{n+1} \geq 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Concluímos, portanto, que $x_n \geq 3,\ \forall n = 0, 1, 2, ...$ como se pretendia provar.

(b) **[0.5 val.]** Prove que x_n é uma sucessão decrescente.

Para provar que a sucessão x_n é decrescente, basta provar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ temos $x_{n+1} \leq x_n$ que é equivalente a provar que $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Temos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n} - x_n = \frac{x_n^2 + 9 - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{-x_n^2 + 9}{2x_n}.$$

Como pela alínea a) temos $x_n \geq 3$, o denominador é sempre positivo e temos $x_n^2 \geq 3^2 = 9$, pelo que $-x_n^2 + 9 \leq 0$. Assim, $x_{n+1} - x_n \leq 0$ e a sucessão é decrescente.

(c) **[0.4 val.]** Prove que x_n é convergente e calcule o seu limite.

Pela alínea b) sabemos que a sucessão é decrescente, pelo que

$$5 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n.$$

Como pela alínea a), temos $x_n \geq 3, \ \forall n = 0, 1, 2...$, então

$$x_n \in [3, 5], \forall n \in \mathbb{N}_0$$

e a sucessão x_n é limitada. Como x_n é monótona (decrescente) e limitada, então concluímos que a sucessão é convergente. Usando a notação $X = \lim_{n\to\infty} x_n$, temos também que $X = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$, pelo que

$$\begin{aligned} X = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2 + 9}{2x_n}\right) &= \frac{\lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 9)}{\lim_{n\to\infty} (2x_n)} \\ &= \frac{(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + 9}{2 \lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{X^2 + 9}{2X}. \end{aligned}$$

Notamos que como pelo alínea a) temos $x_n \geq 3, \ n = 0, 1, 2, ...$, então $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 3 > 0$, pelo que o denominador nunca se anula e temos

$$\begin{aligned} X = \frac{X^2 + 9}{2X} &\iff 2X^2 = X^2 + 9 \iff X^2 = 9 \\ &\iff X = 3 \ \vee \ X = -3 \end{aligned}$$

e como devemos ter $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 3$, concluímos que

$$X = \lim_{n\to\infty} x_n = 3.$$

3. **[1.4 val.]** Considere a função $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 2)}{x^2 - 9}$.

   (a) **[0.2 val.]** Determine o domínio de f.
   Temos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 > 0,$$

pelo que $\ln(x^2+2)$ está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, para determinarmos o domínio de f devemos impor que o denominador não se anule, ou seja,

$$x^2 - 9 \neq 0 \iff x \neq -3 \wedge x \neq 3,$$

pelo que o domínio de f é

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

(b) **[0.3 val.]** Mostre que f é diferenciável no seu domínio.

A função x^2+2 é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial. Para além disso, como vimos $x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Assim, $\ln(x^2+2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois resulta da composição da função logaritmo (que é diferenciável no seu domínio) com a função polinomial x^2+2. A função x^2-9 também é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial. Assim, f é diferenciável no seu domínio, pois resulta do quociente de funções diferenciáveis, cujo denominador não se anula.

(c) **[0.4 val.]** Mostre que existe $z\in]-1,1[$ tal que $f'(z)=0$.

Pela alínea anterior, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. Em particular, f é diferenciável em $]-1,1[$ e contínua no intervalo $[-1,1]$, pelo que é válido o Teorema de Rolle. Como

$$f(-1)=\frac{\ln((-1)^2+2)}{(-1)^2-9}=\frac{\ln(1^2+2)}{1^2-9}=f(1),$$

concluímos que existe $z\in]-1,1[$, tal que $f'(z)=0$.

(d) **[0.5 val.]** Estude a existência de assíntotas ao gráfico de f.

Antes de mais, notamos que para todo $x\in D_f$, temos

$$f(-x)=\frac{\ln((-x)^2+2)}{(-x)^2-9}=\frac{\ln(x^2+2)}{x^2-9}=f(x),$$

ou seja, f é uma função par. Assim, se para um dado $a\in\mathbb{R}$, $x=a$ for uma assíntota vertical ao gráfico de f também a recta $x=-a$ será assíntota vertical ao gráfico de f. Da mesma forma, se para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, a recta $y=\alpha x+\beta$ for uma assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$, a mesma recta será assíntota quando $x\to-\infty$.

Pela alínea anterior, a função f é diferenciável em $]-\infty,-3[$, $]-3,3[$ e $]3,+\infty[$, pelo que é também contínua nesses intervalos. Portanto, as eventuais assíntotas verticais serão $x=3$ (e nesse caso também $x=-3$).

Calculemos

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{\ln(x^2+2)}{x^2-9}=\frac{\ln(11)}{0^+}=+\infty,$$

pelo que $x=3$ e $x=-3$ são assíntotas verticais ao gráfico de f.

Para averiguar a existência de assíntotas oblíquas ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$, calculamos

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x\,(x^2-9)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x^3-9x}$$

que conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Vamos tentar levantar esta indeterminação pela regra de Cauchy. Para isso calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x^2+2)\right)'}{\left(x^3-9x\right)'} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+2}}{3x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(3x^2-9)\,(x^2+2)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x^4-3x^2-18} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{3x^4-3x^2-18}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x^3-3x-\frac{18}{x}} = 0,
\end{aligned}$$

porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{18}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(3x^3-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \underbrace{\left(3x^2-3\right)}_{\to+\infty} = +\infty.$$

Como existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x^2+2)\right)'}{\left(x^3-9x\right)'}$, pela regra de Cauchy, também existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x^3-9x}$ e temos $m = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x^3-9x} = 0$. Calculemos agora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x^2-9}$$

que conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Vamos novamente tentar levantar esta indeterminação pela regra de Cauchy. Calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x^2+2)\right)'}{\left(x^2-9\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0.$$

Logo, $y = 0$ é um assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$ (e portanto, também quando $x \to -\infty$).

4. **[0.6 val.]** Prove que a função $f(x) = x^3 + \sin(2x) - 3$ tem uma e uma só raiz em $[1, 2]$.

A função $\sin(2x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois resulta da composição da função polinomial $2x$ com a função seno, ambas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, pelo que $\sin(2x)$ é também diferenciável em $\mathbb{R}$.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a soma de uma função polinomial com a função $\sin(2x)$, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular, contínua no intervalo $[1,2]$. Agora temos

$$f(1) = 1 + \sin(2) - 3 = -2 + \sin(2) < 0,$$

pois

$$\sin(2) \leq 1 \Rightarrow -2 + \sin(2) \leq -2 + 1 = -1 < 0.$$

Temos também

$$f(2) = 2^3 + \sin(4) - 3 = 5 + \sin(4) > 0$$

pois

$$\sin(4) \geq -1 \Rightarrow 5 + \sin(4) \geq 5 - 1 = 4 > 0.$$

Assim, como f é contínua em $[1,2]$, $f(1) < 0$ e $f(2) > 0,$ pelo Teorema de Bolzano, concluímos que existe $z \in]1,2[$ tal que $f(z) = 0$. Provamos agora que a existe apenas uma raiz no intervalo $[1,2]$.

Sabemos que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e temos

$$f'(x) = 3x^2 + 2\cos(2x).$$

Agora notamos que

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\cos(2x) \leq 2$$

e

$$x \in [1,2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 3x^2 \leq 12,$$

logo, para $x \in [1,2]$ temos

$$f'(x) = 3x^2 + 2\cos(2x) \geq 3 - 2 = 1 > 0.$$

Assim concluímos que existe uma única raiz no intervalo $]1,2[$, o que pode ser provado pelo Teorema de Rolle. Com vista a um absurdo, suponhamos que existiam duas raízes distintas $z_1, z_2 \in]1,2[$. Então teríamos

$$f(z_1) = f(z_2) = 0,$$

pelo que o Teorema de Rolle garantiria a existência de $\rho \in]1,2[$ tal que $f'(\rho) = 0$, o que contraria o facto de termos $f'(x) > 0$ para todo $x \in]1,2[$. Concluímos portanto que a função $f(x) = x^3 + \sin(2x) - 3$ tem uma e uma só raiz em $[1,2]$.

FIM