

U.C. 21002

Álgebra Linear I

16 de julho de 2013

- O p-fólio é composto por 4 grupos de questões e respectivas alíneas, contém 3 página(s) e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo I (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos II, III e IV deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das questões do grupo I (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo I é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II	III	IV
1.5 val.	5.0 val.	2.5 val.

Nome:

Nº de Estudante: B.I./C.C. nº

Turma Assinatura do Vigilante:

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

Questão 1

Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que $\dim(F) = 2$ e $\dim(G) = 2$. Então:

- ☐ a) $\dim(F + G) = 4$ e $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ b) Se $\dim(F + G) = 2$ então $\dim(F \cap G) = 1$.
- ☐ c) Se $\dim(F + G) = 3$ então $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ d) Se $\dim(F + G) = 3$ então $\dim(F \cap G) = 1$.

Questão 2

Considere as afirmações seguintes:

- i) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ii) $\{(1, 0, 0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 1, 0, 1), (\sqrt{2}, 1, 0, 0)\}$ é um conjunto linearmente independente.
- iii) $\{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 0, 1), (3, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ gera $\mathbb{R}^4$.

Então:

- ☐ a) Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- ☐ b) Apenas uma das afirmações é sempre verdadeira.
- ☐ c) Apenas duas das afirmações são sempre verdadeiras.
- ☐ d) Todas as afirmações são verdadeiras.

Nome:
 N° de Estudante: B.I./C.C. n°
 Turma Assinatura do Vigilante:

Questão 3

Sejam $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas aplicações lineares definidas por $f(x, y) = (x - 2y, -x)$ e $g(x, y) = (x, x - y)$. Então, relativamente à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ na partida e na chegada, a matriz da aplicação $f \circ g$ é:

☐ a) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ c) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

☐ b) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ d) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTE NO CADERNO DE PROVA

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

- II. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Seja $T \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio característico é $p_T(x) = x(x - 1)$. Então T é idempotente, ou seja tem-se $T^2 = T$.

- III. Seja $\mathbb{R}_3[x]$ o espaço vetorial dos polinómios, na variável real x , com coeficientes reais, e como grau não superior a 3. Sejam

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad p_2(x) = 1 - x^3, \quad p_3(x) = 1 + x, \quad p_4(x) = x^2,$$

e considere a transformação linear $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$T(p_1) = 0, \quad T(p_2) = p_4, \quad T(p_3) = 0, \quad T(p_4) = p_2.$$

- Mostre que $\mathcal{B} = \{p_j \in \mathbb{R}_3[x] \mid j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.
- Determine a matriz $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ em ambos os espaços de partida e de chegada.
- Sendo $\mathcal{B}' = \{e_j \in \mathbb{R}_3[x] \mid e_j(x) = x^j, \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}\}$, determine a matriz de mudança de base $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}_3[x]}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Nome:
Nº de Estudante: B.I./C.C. nº
Turma Assinatura do Vigilante:

IV. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Diz-se que $B \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ é uma *inversa esquerda* de A se $BA = I_n$. Diz-se que $C \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ é uma *inversa direita* de A se $AC = I_m$.

- a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ admite como inversa esquerda qualquer matriz da forma $\begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{C})$, onde z é qualquer elemento de $\mathbb{C}$.
- b) Mostre que se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ tem simultaneamente uma inversa esquerda B e uma inversa direita C , então $B = C$ e $n = m$. (Sugestão: Considere a matriz BAC .)

FIM