p-Fólio

U.C. 21165
Geometria

-data-

- INSTRUÇÕES -

- O p-fólio é composto por 6 questões (de onde serão escolhidas 4), contém 1 página e termina com a palavra **FIM**. Contém ainda duas páginas de elementos de consulta.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. Não serão classificadas respostas apresentada em folhas de rascunho.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- **Não é permitido utilizar máquina de calcular nem quaisquer elementos de consulta para além dos fornecidos no enunciado. É permitido usar régua e compasso.**
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **90 minutos**.
- As questões terão as cotações seguintes:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
3 val.	3 val.	3 val	3 val

Responda a quatro (e apenas quatro) das seguintes seis questões, à sua escolha. Nota: Se responder a mais do que quatro, só as primeiras quatro questões serão consideradas para avaliação.

Problema 1. *Mostre, usado modelos finitos, que cada um dos três axiomas de incidência plana* A_1, A_2, A_3 *é independente dos outros dois.*

Problema 2. *Mostre que se uma recta tiver um ponto no interior de um triângulo, então ela corta algum dos lados.*

Problema 3. *Mostre que se em dois triângulos, ângulos congruentes num e noutro subtenderem lados proporcionais, então os triângulos são semelhantes.*

Problema 4. *Define-se o modelo Pombalino (ou modelo da "taxicab geometry") tomando para pontos e rectas exactamente os mesmos que no plano cartesiano real, mas para distância entre dois pontos* $P = (x, y)$ *e* $Q = (a, b)$ *a função*

$$d_P(P, Q) = |x - a| + |y - b|.$$

Encontre um sistema de coordenadas para uma recta genérica no plano Pombalino.

Problema 5. *a) Prove a independência de LAL face aos axiomas* $A_1 - A_8$ *utilizando um modelo* (E', L', d', m') *que coincide com o plano cartesiano real* (E, L, d_E, m) *excepto pela existência de uma recta especial* l_0 *sobre a qual de verifica* $d'(P, Q) = 2d_E(P, Q)$ *sempre que* $P, Q \in l$.

b) Diga se no plano referido na alínea anterior é verificada a desigualdade triangular.

Problema 6. *Dados três pontos arbitrários, demonstre que há uma única circunferência que atravessa os três pontos.*

FIM

ELEMENTOS DE CONSULTA

Axiomas de incidência Plana

(A_1) Para quaisquer dois pontos P e Q existe uma e uma só linha que passa por P e Q.

(A_2) Toda a linha contém pelo menos dois pontos.

(A_3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

Axioma de medição linear

(A_4) Para cada linha $l \in \mathcal{L}$ existe um sistema de coordenadas para l.

Axioma de separação no plano

(A_5) Para toda a recta $l \subset \alpha$ existem subconjuntos convexos H_1 e H_2 de α tais que:

(i) para todo o ponto P de α tem-se $P \notin l$ sse $P \in H_1 \cup H_2$

(ii) para quaisquer pontos distintos P e Q de α, $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ sse $\overline{PQ}$ corta l.

Axioma de medição angular

(A_6) Sejam A e B pontos distintos, H um semiplano limitado pela recta $\overleftrightarrow{AB}$. Então, para todo o $\alpha \in]0, 180[$ existe uma única semi-recta $\overrightarrow{AP}$, com $p \in H$ tal que $m(\angle PAB) = \alpha$.

(A_7) Se $D \in int(\angle BAC)$, então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

(A_8) Se $\angle ABC$ e $\angle ABD$ são suplementares adjacentes (isto é, C-B-D, $A \notin \overleftrightarrow{BD}$) então $m(\angle ABC) + m(\angle ABD) = 180$.

Axioma da congruência de triângulos (LAL)

(A_9) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \angle A \equiv \angle D$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Axioma de paralelismo de Hilbert

(A_{10}) Para toda a recta r e todo o ponto $P \notin r$ existe, quanto muito, uma recta paralela a r passando por P.

Axiomas de incidência para o espaço

(A_{11}) Para quaisquer três pontos não colineares existe um e um só plano que passa pelos três pontos.

(A_{12}) Se dois pontos estão num plano então a linha que passa por esses dois pontos está contida no plano.

(A_{13}) Se dois planos têm um ponto comum então a intersecção dos dois planos é uma linha.

(A_{14}) Todo o plano contêm pelo menos três pontos não colineares.

(A_{15}) Existem pelo menos quatro pontos não complanares.

Axioma de separação no espaço

(A_{16}) Para todo o plano α existem conjuntos convexos H_1 e H_2 tais que:

(i) para todo o ponto P tem-se $P \notin \alpha$ sse $P \in H_1 \cup H_2$

(ii) para quaisquer pontos distintos P e Q, $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ sse $\overline{PQ}$ corta α.

Axioma hiperbólico do paralelismo

Para toda a linha l e todo o ponto $P \notin l$, existem, pelo menos, duas paralelas a l passando por P.