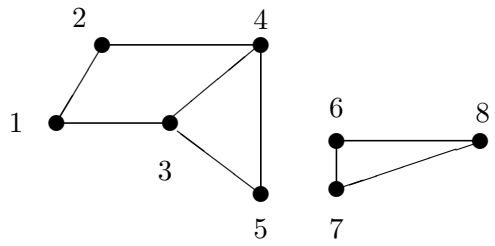
# Capítulo 4

# Teoria dos Grafos

## 4.1 Introdução

A teoria dos grafos tem a sua origem na necessidade de representar por esquemas as relações existentes entre os elementos de um conjunto. Neste sentido, constitui um ramo específico da teoria das relações binárias definidas num conjunto. Esta teoria cobre um vasto campo de aplicações que vão desde a física até certos domínios da arte, passando pela química, biologia, sociologia, economia, gestão, engenharia, etc.

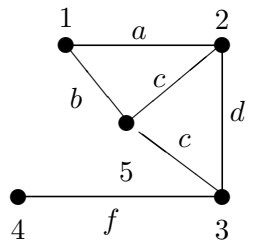
A noção de digrafo ou grafo dirigido, foi já referida a propósito da representação geométrica de uma relação binária definida num conjunto. Se $\mathcal{R}$ for uma relação simétrica, então sempre que $(x_i, x_j)$ pertence ao digrafo também $(x_j, x_i)$ lhe pertencerá. Neste caso a ligação entre dois vértices (quando existe) faz-se sempre nos dois sentidos, podendo representar-se este facto por uma aresta única (não dirigida). Obtém-se, assim, um grafo não dirigido (ou, simplesmente, grafo). Embora a teoria dos grafos seja um instrumento natural para o estudo das relações binárias, há, hoje em dia, muitos outros tópicos de matemática quer pura quer aplicada para os quais o recurso à teoria dos grafos constitui uma atitude natural. Na figura seguinte apresenta-se um exemplo de um grafo (não dirigido).




Embora o aparecimento da teoria dos grafos se possa situar ao tempo de Euler (1707-1783) o seu desenvolvimento enquanto teoria autónoma é bastante recente. Por este facto, muitas das notações e designações que se usam a seguir podem variar bastante na literatura técnica dedicada a este assunto.

### 4.1.1 Definições básicas

Chama-se **grafo** $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ a uma estrutura constituída por um conjunto finito[1] $V$ de **vértices** (também designados por **nós**) e um conjunto finito $E$ de **arestas** de tal forma que cada aresta está associada a um par de vértices



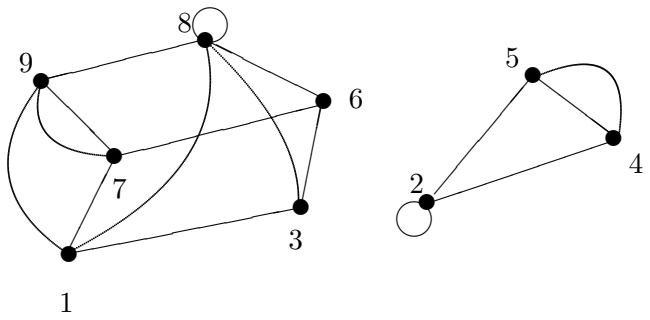

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Sendo $e$ uma aresta e $v, w$ dois vértices, escreve-se $e = \{v, w\}$ ou $e = \{w, v\}$ dizendo-se então que $e$ é uma aresta *entre* $v$ e $w$ ou que a aresta $e$ liga os vértices $v$ e $w$ que, por este facto, se dizem **adjacentes**. Uma aresta que liga um vértice a si próprio designa-se por **lacete**.

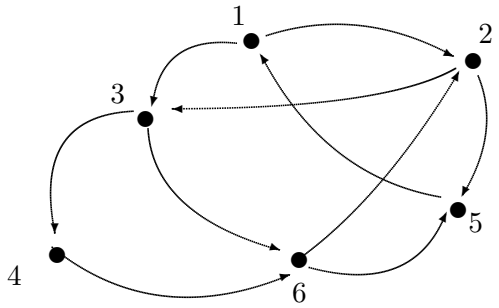
Na representação pictórica de um grafo, os vértices são representados por pequenos círculos afectados de um símbolo que constitui o seu nome, enquanto que as arestas são representadas por linhas que ligam dois vértices (segmentos de recta ou linhas curvas).

[1] Também se podem considerar grafos infinitos com um conjunto numerável de vértices. Aqui, no entanto, apenas se estudará o caso dos grafos com um número finito de vértices.

Se entre dois vértices existir mais que uma aresta então, se for necessário efectuar distinções, o grafo correspondente toma o nome de **multigrafo** e as várias arestas que ligam os mesmos dois vértices também se designam por arestas múltiplas. No entanto, na literatura da especialidade, em geral, o termo grafo é empregue mesmo quando possui arestas múltiplas.

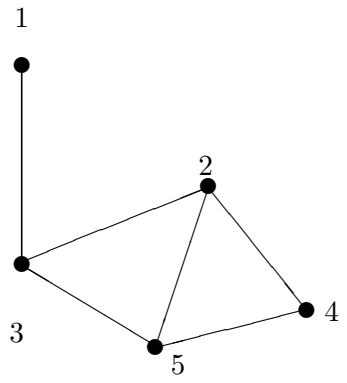



Neste contexto, chama-se **grafo orientado** ou **digrafo** ( *"directed graph"*) a uma estrutura $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ onde, novamente, $V$ é um conjunto finito de vértices e $E$ um conjunto finito de **arcos** dirigidos. A seguir apresenta-se um exemplo de um digrafo com 6 vértices e 10 arcos dirigidos.



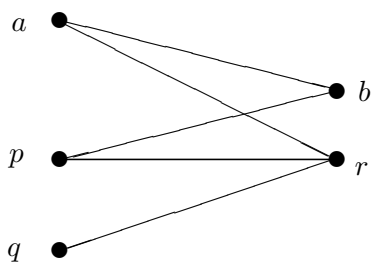

Num digrafo escreve-se $e \equiv (v, w)$ para significar que $e$ é um arco que liga $v$ a $w$ orientado de $v$ para $w$. Neste caso diz-se que $v$ é **adjacente** ao vértice $w$, que o arco $e$ é **incidente** sobre $w$ e **emergente** de $v$.

Um grafo diz-se **simples** quando não possui lacetes nem arestas múltiplas. O grafo que se segue




é um exemplo de um grafo simples.

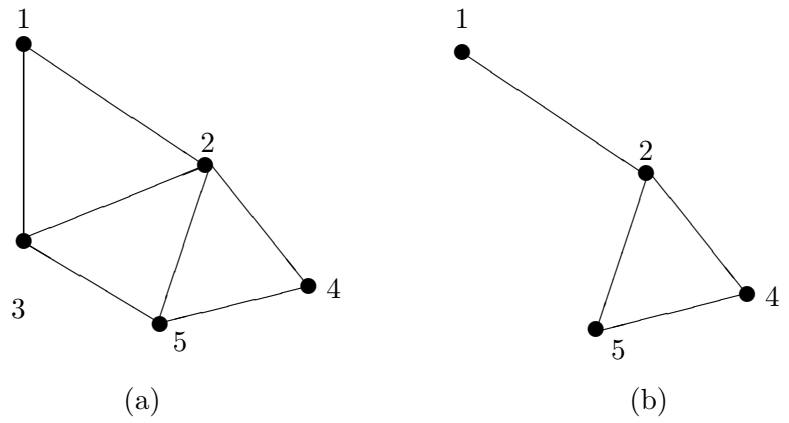
Um tipo de grafos com muita importância em problemas de emparelhamento (casamentos, distribuição de grupos de tarefas por grupos de pessoas, etc.) são os chamados **grafos bipartidos** que são grafos nos quais os vértices podem ser cindidos em dois conjuntos disjuntos $V$ e $W$ tais que cada aresta liga sempre um vértice de $V$ a um vértice de $W$. Neste caso denota-se por $\mathcal{G} \equiv (V, W; E)$. Na figura que se segue apresenta-se um exemplo de um grafo bipartido




$$V = \{a, p, q\}, \quad W = \{b, r\}, \quad \mathcal{G} = (V, W; E)$$

Um grafo diz-se **nulo** se possuir apenas vértices sem arestas nem lacetes; por outro lado, no extremo oposto, um grafo diz-se **completo** quando entre cada par de vértices há uma aresta. Neste último caso, se o grafo tiver $n$ vértices é habitual denotá-lo por $K_n$. Um digrafo diz-se completo se entre cada par de vértices existir pelo menos um arco. Um grafo bipartido simples $\mathcal{G} \equiv (V, W; E)$ diz-se completo se existir uma aresta entre cada vértice de $V$ e cada vértice de $W$. Um grafo bipartido completo denota-se por $K_{p,q}$ onde $p$ e $q$ são o número de vértices de $V$ e $W$, respectivamente.

Sejam $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ e $\mathcal{G}' \equiv (V', E')$ dois grafos dados: $\mathcal{G}'$ dir-se-á um **subgrafo** de $\mathcal{G}$ se $V'$ for um subconjunto de $V$ e $E'$ um subconjunto de $E$. Suponha-se que $W$ é um subconjunto não vazio de $V$. Dá-se o nome de **subgrafo de $\mathcal{G}$ induzido por** $W$ ao grafo $\mathcal{H} \equiv (W, F)$ onde para cada aresta $f \in F$ se tem $f = \{u, v\} \in E$ e $u, v \in W$.



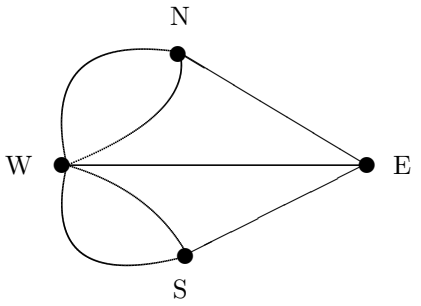

Nesta figura o grafo (b) é um subgrafo do grafo (a) induzido pelo conjunto $W = \{1, 2, 4, 5\}$ que é um subconjunto do conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de vértices do primeiro.

**Exemplo 4.1 (Digrafo de comunicações.)** Considere-se uma organização com várias secções. Cada secção é representada por um vértice, desenhando-se uma flecha do vértice $v$ para o vértice $w$ se a secção $v$ puder transmitir sinais para a secção $w$. O digrafo assim resultante é o que se designa por digrafo de comunicação.

**Exemplo 4.2 (As pontes de Königsberg.)** A primeira publicação em teoria dos grafos foi feita por L. Euler em 1736. O artigo de Euler solucionava um problema conhecido pelo problema das pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg (hoje conhecida por Kaliningrad) na Prússia, banhada pelo rio Pregel, é constituída por quatro partes: a parte a norte do rio, $N(\equiv A)$, a parte a sul do rio, $S(\equiv D)$, e duas ilhas situadas no interior do rio, a ilha ocidental, $W(\equiv B)$ e a ilha oriental, $E(\equiv C)$.

Ligando estas quatro componentes da cidade existem 7 pontes tal como se indica na figura. Os habitantes de Königsberg, que gostavam de passear na cidade ao domingo, colocavam a si próprios a seguinte questão: *será possível planear um passeio pela cidade de tal forma que partindo de casa a ela se regressasse após ter atravessado* **uma e uma só vez** *cada uma das sete pontes?*

Se se considerar cada uma das quatro partes da cidade como um vértice e cada ponte como uma aresta, então o problema corresponde ao seguinte grafo (multigrafo) com 4 vértices e 7 arestas




Em termos de teoria dos grafos o problema pode então ser assim formulado: dado um grafo qualquer (não necessariamente simples) será possível percorrer todas as arestas do grafo sem passar por cima de nenhuma delas mais que uma vez?

No caso do problema das pontes de Königsberg, Euler estabeleceu a resposta definitiva, pela negativa, como mais à frente se verá.

**Exemplo 4.3 (Rêde de transportes.)** Suponha-se que cada vértice de um grafo dado representa uma cidade da Europa, por exemplo. Dois vértices são ligados por uma aresta se existir uma ligação aérea directa entre as cidades que eles representam. Um problema que se pode pôr é o de saber se se pode partir de uma dada cidade e voltar à mesma cidade depois de ter visitado todas as outras. Se a cada aresta se associar um número real não negativo que represente o custo do uso daquela aresta, pode colocar-se um problema de optimização que é o de encontrar

o percurso (se existir) que satisfaz a condição do problema anterior ao menor custo. Este é o conhecido **problema do caixeiro viajante**.

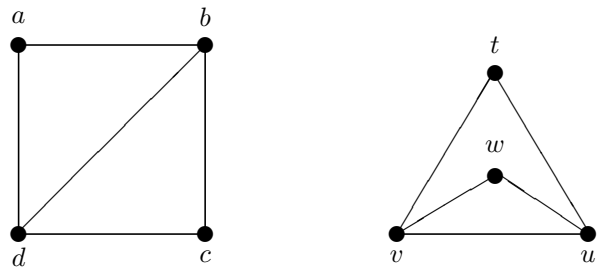
**Grafos isomorfos.** Definindo grafo como um par ordenado constituído por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, o mesmo grafo pode aparecer com representações pictóricas muito distintas. É, por isso, importante, dispor de um critério que nos permita saber quando é que dois grafos (aparentemente) distintos são afinal o mesmo grafo. Tal critério resulta imediatamente da noção de isomorfismo de grafos.

**Definição 4.4** *Dois grafos* $\mathcal{G}_1 \equiv (V_1, E_1)$ *e* $\mathcal{G}_2 \equiv (V_2, E_2)$ *dir-se-ão* **isomorfos** *se existir uma bijecção*

$$\varphi : V_1 \to V_2$$

*tal que* $\{\varphi(u), \varphi(v)\}$ *seja uma aresta de* $\mathcal{G}_2$ *se e só se* $\{u, v\}$ *for uma aresta de* $\mathcal{G}_1$.

**Exemplo 4.5** Os grafos




$G_1 \equiv (V_1, E_1)$ $\qquad$ $G_2 \equiv (V_2, E_2)$

são isomorfos. De facto, sendo

$$\varphi : V_1 \to V_2$$

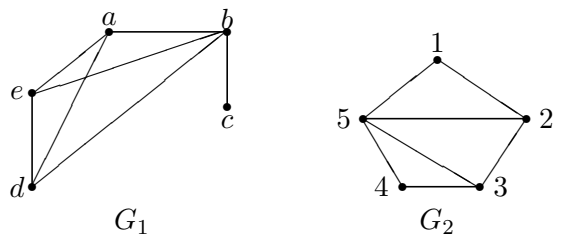
a bijecção definida por

$$\varphi(a) = t, \;\; \varphi(b) = v, \;\; \varphi(c) = w, \;\; \varphi(d) = u$$

pode verificar-se facilmente que $\varphi$ constitui um isomorfismo de grafos.

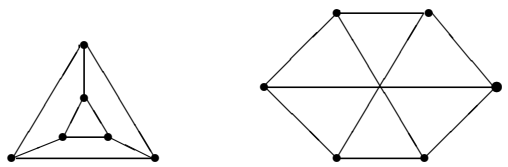
Dois grafos isomorfos, aparte os nomes dados aos vértices e às arestas e a sua representação pictórica são, na realidade, o mesmo grafo e é como tal que podem ser encarados no contexto da teoria dos grafos.

Para mostrar que dois grafos não são isomorfos é necessário mostrar que não existe qualquer bijecção entre os conjuntos de vértices respectivos que transformem arestas em arestas. Se dois grafos não tiverem o mesmo número de vértices então não são isomorfos; se tiverem o mesmo número de vértices mas tiverem diferente número de arestas também não podem ser isomorfos. Finalmente, mesmo que dois grafos tenham o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas, ainda assim eles podem não ser isomorfos. Por exemplo, os dois grafos




têm ambos 5 vértices e 7 arestas. No entanto, não são isomorfos. Uma forma de mostrar que isto é verdade é notar que os vértices $a, b, d, e$ de $\mathcal{G}_1$ formam um subgrafo completo de $\mathcal{G}_1$: qualquer isomorfismo com $\mathcal{G}_1$ deverá transformar estes quatro vértices noutros quatro vértices com a mesma propriedade. Ora, em $\mathcal{G}_2$ não há quatro vértices que induza um subgrafo completo de $\mathcal{G}_2$ e, portanto, este não pode ser isomorfo a $\mathcal{G}_1$.

**Exercícios 4.1.1** *Mostrar que os grafos*



*não são isomorfos.*

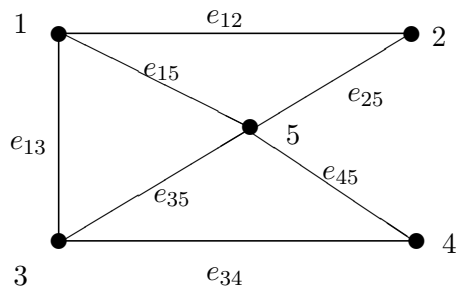
### 4.1.2 Caminhos de um grafo

Chama-se **caminho** entre dois vértices $v_1$ e $v_r$ num grafo a uma sequência finita de vértices e arestas da forma

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{r-1}, v_r$$

onde, para cada $j$, $e_j$ é uma aresta que liga $v_j$ a $v_{j+1}$. Os vértices e as arestas de um caminho podem não ser todos distintos. Ao número de arestas que compõem um caminho dá-se o nome de **comprimento** desse caminho.

Um caminho diz-se **simples** se não tiver arestas repetidas e diz-se **elementar** se todos os seus vértices forem distintos. Um caminho no qual o vértice inicial e o vértice terminal coincidem chama-se **circuito**. Um circuito diz-se simples se não possuir arestas repetidas e um circuito no qual nenhum vértice é repetido excepto o vértice inicial (terminal) designa-se por **ciclo**. No grafo que se segue, por exemplo,




o caminho $3e_{35}5e_{25}2e_{12}1e_{15}5e_{45}4e_{34}3$ é um circuito simples (não há arestas repetidas e o vértice inicial e terminal coincidem), mas não é um ciclo já que para além do vértice inicial (que é também terminal) há outro vértice, o vértice 5, que está repetido.

Num digrafo estes conceitos podem ter em conta a orientação. Chama-se **caminho orientado** a uma sequência finita de arcos da forma

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{r-1}, v_r$$

onde, para cada $j = 1, 2, \ldots, r-1$, se tem $e_j = (v_j, v_{j+1})$. A partir daqui define-se caminho fechado, circuito e ciclo concordantemente.

**Grafos conexos.** Seja $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ um grafo qualquer. No conjunto $V$ dos vértices define-se a seguinte relação

$$v \mathcal{J} w \textit{ se e só se } v = w \textit{ ou}$$
$$\textit{existe um caminho entre } v \textit{ e } w.$$

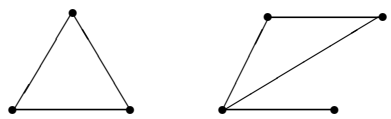
Esta relação é

- reflexiva,

- simétrica e
- transitiva

e, portanto, é uma relação de equivalência. Então $V$ pode decompor-se em classes de equivalência $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$; cada um dos subgrafos $\mathcal{G}_i$, (com $i = 1, 2, \ldots, r$), induzido por $V_i \subset V$, chama-se **componente conexa do grafo** $\mathcal{G}$.

**Exemplo 4.6** O grafo



tem duas componentes conexas.

**Definição 4.7** *Um grafo diz-se* **conexo** *se e só se possuir uma só componente conexa, ou seja, se e só se entre dois quaisquer dos seus vértices existir sempre um caminho. Um grafo que possui mais que uma componente conexa diz-se um* **grafo desconexo**.

No caso dos digrafos a questão da conexidade é um pouco mais complexa: assim, se entre dois vértices quaisquer $v_i$ e $v_j$ ($v_i \neq v_j$) existir sempre um caminho orientado de $v_i$ para $v_j$ e um caminho orientado de $v_j$ para $v_i$ o digrafo diz-se **fortemente conexo**; se tal não acontecer, mas o grafo que se obtém do digrafo retirando simplesmente a orientação dos seus arcos (isto é, transformando todos os seus arcos em arestas) for conexo então o digrafo diz-se **fracamente conexo**.

### 4.1.3 Graus dos vértices de um grafo

Uma aresta $e$ de um grafo diz-se **incidente** sobre o vértice $v$ se este for um dos seus pontos extremos. Chama-se **grau** de um vértice $v$ ao número de arestas que incidem sobre esse vértice. Um vértice diz-se **ímpar** ou **par** consoante o seu grau seja um número ímpar ou par, respectivamente. [Note-se que um lacete incide duas vezes sobre o mesmo vértice pelo que conta duas vezes para efeito do cálculo do grau do vértice respectivo.]

**Teorema 4.8** *Em qualquer grafo a soma dos graus dos seus vértices é igual a duas vezes o número das suas arestas.*

**Demonstração:** Proceder-se-á por indução sobre o número de arestas do grafo: denote-se por $p(n)$ a afirmação de que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo com $n$ arestas é igual a $2n$.

(i) – Se o grafo não tem qualquer aresta, então o grau de qualquer dos seus vértices é zero e a soma dos graus de todos os vértices é zero. Assim, $p(0)$ é uma proposição verdadeira.

(ii) – Suponha-se que para um dado $k \in \mathbb{N}$ se verifica $p(k)$, isto é, que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo com $k$ arestas é igual a $2k$. Considere-se agora um grafo $\mathcal{G}$ com $k+1$ arestas. Pretende-se provar que a soma dos graus de todos os vértices de $\mathcal{G}$ é igual a $2k+2$. Para tal, considere-se um grafo $\mathcal{G}'$ exactamente igual a $\mathcal{G}$ mas com menos uma aresta, por exemplo, a aresta $\{a, b\}$.

Pela hipótese de indução, $\mathcal{G}'$ tem $k$ arestas e, portanto, a soma dos graus de todos os seus vértices é igual a $2k$. Para obter $\mathcal{G}$ a partir de $\mathcal{G}'$ a única coisa que é necessário fazer é acrescentar a $\mathcal{G}'$ a aresta $\{a, b\}$. Este acrescento aumenta o grau do vértice $a$ de uma unidade e o grau do vértice $b$ de uma unidade: então, ao passar de $\mathcal{G}'$ para $\mathcal{G}$ por adição da aresta $\{a, b\}$ a soma dos graus de todos os vértices de $\mathcal{G}'$ aumenta 2 unidades fazendo com que a soma dos graus de todos os vértices de $\mathcal{G}$ seja igual a $2k+2$. Isto significa que para $k \in \mathbb{N}$ dado

$$p(k) \;\Rightarrow\; p(k+1)$$

Por (i) e (ii), tendo em conta o princípio de indução matemática, fica demonstrado o teorema. □

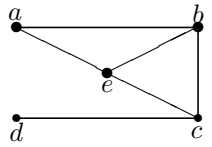
**Corolário 4.9** *Em qualquer grafo o número de vértices que tem grau ímpar é um número par.*

**Demonstração:** A soma dos graus de todos os vértices é um número par e, para que assim seja, o número de termos ímpares não pode ser ímpar pois de contrário a soma total seria também ímpar. □

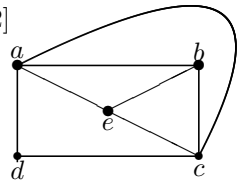
### Exercícios 4.1.2

1. *Para os grafos 1, 2, 3 e 4 desenhados a seguir:*
   - *(a) Fazer a descrição formal (como par ordenado de conjuntos).*
   - *(b) Determinar o grau de cada vértice.*
   - *(c) Determinar o número de arestas.*
   - *(d) Verificar o teorema 4.8.*

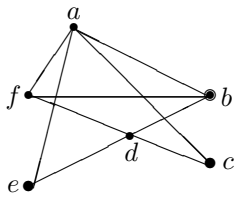
[1]



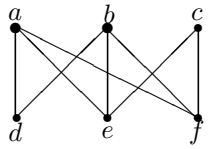

[2]




[3]

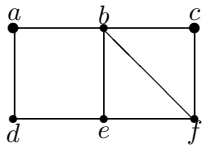



[4]

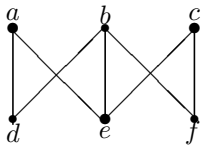



2. *Nos grafos que se seguem, 5, 6, 7, e 8,*

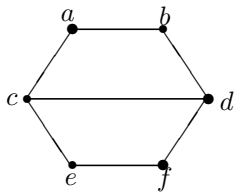
[5]



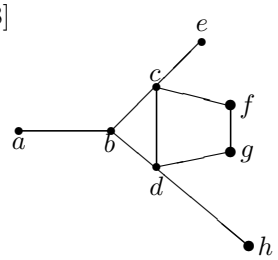

[6]




[7]




[8]




*resolver (se possível) os seguintes problemas:*

(a) *Determinar um caminho elementar de $a$ a $f$.*

(b) *Determinar um caminho simples de $a$ a $f$ que não seja elementar.*

(c) *Determinar um caminho de $a$ a $f$ que não seja simples.*

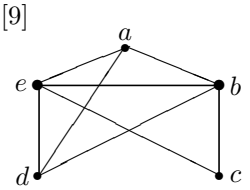
3. *Para cada um dos grafos 9, 10, 11 e 12 resolver os seguintes problemas:*

(a) *Determinar um circuito que não seja um ciclo.*

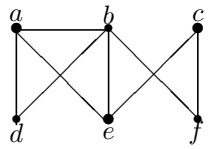
(b) *Determinar um circuito que não seja simples.*

(c) *Determinar um circuito simples.*

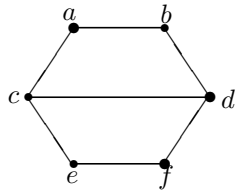
[9]



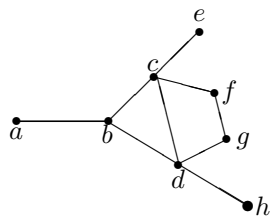

[10]




[11]




[12]




4. *Usando o grafo 5, determinar o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices* $\{a, b, c, f\}$.
5. *Usando o grafo 8, determinar o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices* $\{a, c, d, f\}$.
6. *Usando o grafo 7, determinar os subgrafos induzidos pelos conjuntos de vértices que se obtêm suprimindo um só vértice do conjunto original.*

## 4.2 Representação de Grafos por Matrizes

Uma questão que normalmente se põe em teoria dos grafos é a de saber se, dados dois vértices particulares, existirá algum caminho que os una. Se o grafo for de pequena dimensão (isto é, se tiver um pequeno número de vértices e de arestas), esta questão pode resolver-se, em geral, por simples inspecção da representação pictórica do grafo. Nas situações práticas, no entanto, é necessário lidar com grafos de grande dimensão e complexidade, nos quais a resolução de problemas deste tipo, em tempo aceitável, exige o recurso a meios computacionais para os quais a representação pictórica pouca utilidade tem. Para este efeito, utilização de computadores em teoria dos grafos, existem formas mais adequadas para representação de grafos, uma das quais se baseia na utilização de matrizes.

### 4.2.1 Matriz de adjacência de um grafo

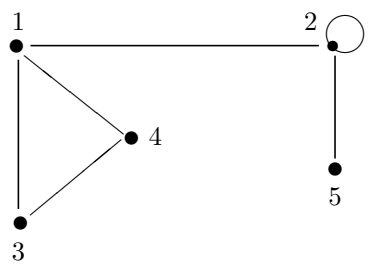
Seja dado um grafo $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e as arestas entre dois vértices, quando existem, são simples. Chama-se **matriz de adjacência** do grafo $\mathcal{G}$ à matriz quadrada de dimensão $n$,

$$A \;=\; [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$$

tal que $a_{ij} = 1$ se existe uma aresta entre os vértices $i$ e $j$ e $a_{ij} = 0$ no caso contrário.

A matriz de adjacência de um grafo é simétrica; os elementos da diagonal principal são todos iguais a 0 se e só se o grafo não possuir lacetes.

**Exemplo 4.10** O grafo




tem a seguinte matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

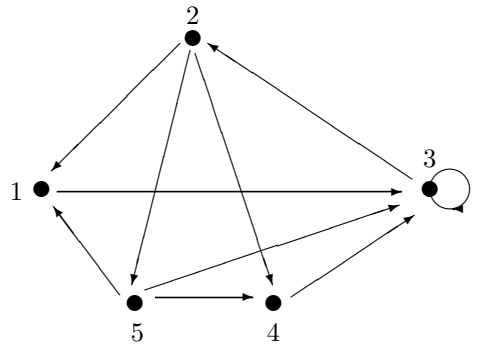
O grau de um vértice $i$ qualquer é igual ao número de elementos iguais a 1 na fila (linha ou coluna) $i$ da respectiva matriz de adjacência.

A matriz de adjacência de um digrafo com $n$ vértices é também uma matriz quadrada de dimensão $n$

$$A \;=\; [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$$

onde $a_{ij} = 1$ se existir o arco de $i$ para $j$ e $a_{ij} = 0$ no caso contrário.

**Exemplo 4.11** Dado o digrafo




corresponde-lhe a matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como é natural, a matriz de adjacência de um digrafo não é necessariamente simétrica.

No caso de um digrafo chama-se **semi-grau incidente** de um vértice ao número de arcos que incidem sobre esse vértice e **semi-grau emergente** ao número de arcos que partem desse vértice. Assim, no grafo acima, o vértice 1, por exemplo, tem um semi-grau incidente e um semi-grau emergente de 2 e 1, respectivamente, enquanto que o vértice 3 tem semi-graus incidente e emergente iguais a 4 e 2, respectivamente.

**Potências da matriz de adjacência.** As sucessivas potências da matriz de adjacência de um grafo servem para determinar o número de caminhos de comprimento dado entre os vários pares possíveis de vértices de um grafo. Assim,

**Teorema 4.12** *Se $A$ for a matriz de adjacência de um grafo $\mathcal{G}$, então o elemento da linha $i$ e coluna $j$ da matriz $A^2$ é igual ao número de caminhos de comprimento 2 que ligam os vértices $i$ e $j$.*

**Demonstração:** Seja $a_{ij}^{(2)}$ o elemento da linha $i$ e coluna $j$ da matriz $A^2$. Então, supondo que $A$ é de dimensão $n$

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} a_{pj}$$

Para cada $p = 1, 2, \ldots, n$ fixado o produto $a_{ip}a_{pj}$ é igual a 1 quando e só quando existe uma aresta de $i$ a $p$ **e** uma aresta de $p$ a $j$, ou seja, quando existe um caminho de comprimento 2 de $i$ a $j$ passando por $p$. Somando todas as possibilidades quando $p$ varia de 1 a $n$ obtém-se o resultado enunciado. □

O teorema 4.12 pode generalizar-se para o seguinte:

**Teorema 4.13** *Se $A$ for a matriz de adjacência de um grafo com $n$ vértices, o elemento da linha $i$ e coluna $j$ da potência de ordem $k$ ($k \geq 1$) de $A$ é igual ao número de caminhos entre os vértices $i$ e $j$ de comprimento $k$.*

**Demonstração:** Demonstrar-se-á este teorema por indução finita. Um caminho de comprimento 1 é uma aresta; logo, tendo em conta a definição de matriz de adjacência, o teorema verifica-se para $k = 1$.

Suponha-se então que o teorema se verifica para a potência $k-1$ ($k > 1$). Seja, para cada $r = 1, 2, 3, \ldots$, $a_{ij}^{(r)}$ o elemento de ordem $(i, j)$ da potência de ordem $r$ da matriz $A$. Então

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}^{(k-1)} a_{pj}$$

onde

$$a_{ip}^{(k-1)} a_{pj} = \begin{cases} a_{ip}^{(k-1)} & \text{se } p \text{ e } j \text{ forem adjacentes} \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Por hipótese (indução) $a_{ip}^{(k-1)}$ é o número de caminhos de comprimento $k-1$ entre os vértices $i$ e $p$ e, portanto, $a_{ip}^{(k-1)}$ será o número de caminhos de comprimento $k$ entre os vértices $i$ e $j$ que incluem uma aresta que vai de $p$ a $j$. Somando todas as possibilidades que vão desde $p = 1$ até $p = n$, obtém-se o resultado pretendido. □

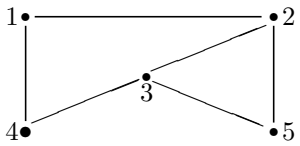
**Corolário 4.14** *O elemento $a_{ii}^{(2)}$ de $A^2$ é igual ao grau do vértice $i$.*

**Demonstração:** Visto que

$$a_{ii}^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} a_{pi}$$

então, como $a_{ip} = 1$ quando e só quando $a_{pi} = 1$, isto é, quando e só quando há uma aresta entre os vértices $i$ e $p$, a soma de $p = 1$ até $p = n$ dá o grau do vértice $i$. □

**Exemplo 4.15** Considere-se o seguinte grafo




cuja matriz de adjacência é a seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então,

$$A^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Em $A^2$ na posição $(4,4)$ está o número 2 que é o grau do vértice 4 e é igual ao número de caminhos do vértice 4 ao vértice 4: os caminhos 4-1-4 e 4-3-4. Da quarta potência de $A$ pode concluir-se, por exemplo, que há 8 caminhos de comprimento 4 entre os vértices 2 e 5. Os elementos que aparecem na diagonal de $A^3$ correspondem aos números de triângulos (circuitos de comprimento 3) que passam pelos vértices respectivos.

Para saber se existe algum caminho entre os vértices $i$ e $j$ de um grafo com $n$ vértices é suficiente determinar as primeiras $n-1$ potências da matriz de adjacência. Se existir algum caminho entre o vértice $i$ e o vértice $j$ ele

tem, no máximo, um comprimento igual a $n-1$. De facto, neste caso, ou há um caminho de comprimento inferior a $n-1$ ou então, na pior das hipóteses, existe um caminho que passa por todos os vértices e tal caminho tem comprimento $n-1$ (note-se que, neste caso, se $i \neq j$ e se existir alguma aresta entre $i$ e $j$ esta não faz parte do caminho referido). Pode então enunciar-se o seguinte resultado:

**Teorema 4.16** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com $n$ vértices cuja matriz de adjacência é $A$. Definindo*

$$S = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$$

*então existe (pelo menos) um caminho entre o vértice $i$ e o vértice $j$ se e só se o elemento de ordem $(i,j)$ na matriz $S$ for diferente de zero.*

**Corolário 4.17** *Se todos os elementos da matriz $S$ forem diferentes de zero então $\mathcal{G}$ é um grafo conexo.*

**Demonstração:** Resulta imediatamente do teorema anterior, tendo em conta a definição de grafo conexo. □

**O caso dos digrafos.** Como já foi referido acima, num digrafo, chama-se **caminho dirigido** do vértice $v$ para o vértice $w$ a uma sequência finita de vértices e arcos

$$v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_r, a_r, v_{r+1}$$

tais que $v_1 = v$ e $v_{r+1} = w$ e, para cada $i$, $a_i$ é um arco dirigido de $v_i$ para $v_{i+1}$. Se existir um caminho dirigido do vértice $v$ para o vértice $w$ então dir-se-á que $v$ está ligado ou **conectado** a $w$. A tradução para digrafos do teorema 4.13 pode enunciar-se da seguinte maneira

**Teorema 4.18** *Se $A$ for a matriz de adjacência de um digrafo, então o elemento da posição $(i,j)$ da potência $A^k$ $(k \geq 1)$ é o número de caminhos dirigidos de comprimento $k$ do vértice $i$ para o vértice $j$.*

A demonstração deste teorema é idêntica à demonstração do teorema 4.13, tendo o cuidado de adaptar todos os resultados usados ao caso dos digrafos.

### 4.2.2 Matriz de incidência de um grafo

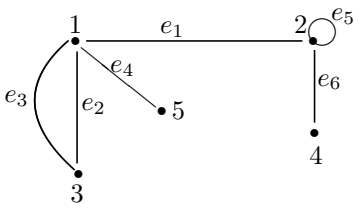
Outra matriz que é útil para representar um grafo sob o ponto de vista computacional é a chamada **matriz de incidência**. Ao contrário da matriz de adjacência, a matriz de incidência pode representar grafos com arestas múltiplas ou (em digrafos) com arcos paralelos.

Seja $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ um grafo onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. A matriz de incidência do grafo $\mathcal{G}$ é uma matriz de dimensão $n \times m$

$$B \;=\; [b_{ij}]_{1 \le i \le n; 1 \le j \le m}$$

onde as linhas correspondem aos vértices e as colunas correspondem às arestas: se, para $k$ dado, o arco $e_k$ ligar os vértices $i$ e $j$, então todos os elementos da coluna $k$ são 0 excepto $b_{ik} = b_{jk} = 1$.

**Exemplo 4.19** A matriz de incidência do grafo




é a seguinte:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada coluna correspondente a uma aresta que não seja um lacete tem apenas dois elementos não nulos; as colunas correspondentes a lacetes têm apenas um elemento não nulo. Além disso, a soma dos elementos de cada linha dá o grau do vértice que lhe corresponde, num grafo simples (sem lacetes).

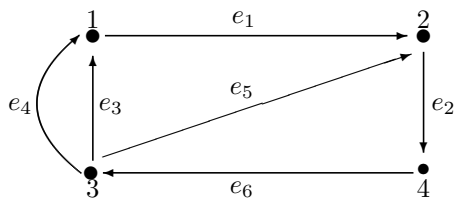
**Exercícios 4.2.1** *Mostrar que entre as matrizes de adjacência e de incidência de um grafo simples (sem lacetes) se verifica a relação*

$$B\,B^t \;=\; D + A$$

*onde $B^t$ é a matriz transposta da matriz de incidência $B$ e $D$ é uma matriz diagonal de dimensão $n$ (número de vértices do grafo) cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices respectivos e $A$ é a matriz de adjacência. À matriz $D$ dá-se o nome de* **matriz dos graus**.

A matriz de incidência $B$ de um digrafo sem lacetes define-se da seguinte maneira: se $e_k$ for um arco de $i$ para $j$ então todos os elementos da coluna $k$ são iguais a 0 excepto $b_{ik} = -1$ e $b_{jk} = 1$.

**Exemplo 4.20** A matriz de incidência do digrafo



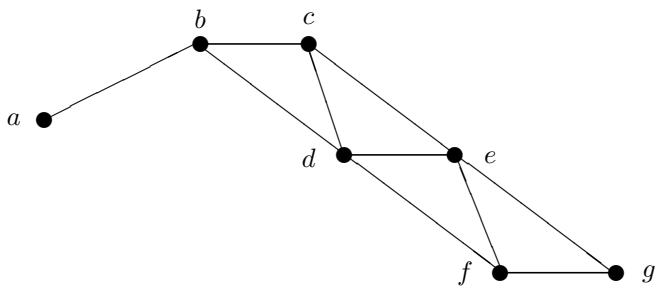

é a seguinte.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A soma de todos os elementos da linha $i$ é igual ao semi-grau incidente menos o semi-grau emergente do vértice correspondente.

### Exercícios 4.2.2

1. *Determinar a matriz de incidência do seguinte grafo*



2. *Seja* $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ *(com* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $E = \{a, b, c, d, e, f\}$*) um grafo cuja matriz de incidência é a seguinte*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) *Determinar o grau de cada vértice.*
   (b) *Esboçar uma representação pictórica de* $\mathcal{G}$.
   (c) *Determinar a matriz de adjacência de* $\mathcal{G}$.

3. *Seja* $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ *(com* $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$*) com a seguinte matriz de incidência*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) *Determinar o grau de cada vértice.*
   (b) *Esboçar uma representação pictórica de* $\mathcal{G}$.
   (c) *Determinar a matriz de adjacência de* $\mathcal{G}$.

4. *Seja* $\mathcal{G}$ *o grafo correspondente à seguinte matriz de adjacência*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) *Determinar o grau de cada vértice.*
   (b) *Esboçar uma representação pictórica de* $\mathcal{G}$.
   (c) *Determinar a matriz de incidência de* $\mathcal{G}$.

5. *Seja* $\mathcal{G}$ *o grafo correspondente à seguinte matriz de adjacência*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   *Por um procedimento matricial indicar se existe um caminho entre os vértices 1 e 5.*

6. *Usar um procedimento matricial para determinar se o grafo ao qual corresponde a matriz de adjacência*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*é ou não conexo.*

7. *Determinar o número total de arestas de um grafo completo com $n$ vértices.*
8. *Determinar o número de arestas do grafo bipartido $K_{p,q}$.*
9. *Construir um grafo conexo simples com $n$ vértices por forma que o grau de cada vértice seja igual a 2. Observar a estrutura deste grafo e comentá-la.*
10. *Provar que num grafo simples com 2 ou mais vértices, os graus dos vértices não podem ser todos distintos.*
11. *Considerar o digrafo $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ onde*

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (1, 6), (2, 6), (5, 2)\}$$

   (a) *Determinar um caminho de 1 a 6 de comprimento 6.*
   (b) *Determinar um caminho simples de 1 a 6 com 5 arcos.*
   (c) *Determinar um ciclo com 4 arcos.*
   (d) *Usar a matriz de adjacência de $\mathcal{G}$ para determinar o número de caminhos de 2 a 4 de comprimento 2.*
   (e) **Definição:** Chama-se **matriz de conexão** de um grafo ou digrafo com $n$ vértices a uma matriz

$$R = [r_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$$

   tal que $r_{ij} = 1$ se existir um caminho (ou caminho orientado, no caso dos digrafos) de $i$ para $j$ e $r_{ij} = 0$ no caso contrário.
   *Determinar a matriz de conexão do grafo $\mathcal{G}$.*

12. *Desenhar um grafo cuja matriz de adjacência é tal que*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

13. *Mostrar que a soma dos elementos da diagonal principal da segunda potência da matriz de adjacência de um grafo (traço de $A^2$) é igual a duas vezes o número de arestas do grafo.*

## 4.3 Caminhos Eulerianos e Hamiltonianos

**Caminhos eulerianos.** Os caminhos eulerianos são assim designados pela sua relação com o problema das pontes de Königsberg que foi resolvido por Euler. Considerem-se, antes de mais, as seguintes definições:

**Definição 4.21** *Chama-se* **caminho euleriano** *a um caminho de um grafo que contém cada aresta uma e uma só vez. Um caminho euleriano que seja fechado designa-se por* **circuito euleriano**.

O problema das pontes de Königsberg é então o de saber se o correspondente grafo possui ou não algum circuito euleriano. A resposta geral é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.22 (Euler)** *Um grafo (ou multigrafo) conexo possui um caminho euleriano se e só se tiver um número de vértices de grau ímpar igual a 0 ou 2. O caminho euleriano é um circuito euleriano se aquele número for 0; de contrário, o caminho euleriano vai de um dos vértices de grau ímpar ao outro vértice também de grau ímpar.*

**Demonstração:** Recorde-se, antes de mais, que o número de vértices de grau ímpar é par (v. corolário 4.9). Mostrar-se-á, em primeiro lugar, que se o número de vértices de grau ímpar for 0 ou 2 então o grafo admite um caminho euleriano. Far-se-á a demonstração por indução finita denotando por $p(m)$ a afirmação do teorema onde $m$ designa o número de arestas do grafo.

(i) – Para um grafo conexo com uma única aresta, há apenas duas possibilidades: ou o grafo tem um só vértice com um lacete ou o grafo tem dois vértices. No primeiro caso o grau do vértice é 2 e, portanto, há zero vértices de grau ímpar sendo o caminho obtido um circuito euleriano.

No segundo caso há dois vértices, cada um dos quais tem grau 1 – grau ímpar – pelo que a aresta em questão constitui um caminho euleriano que vai de um vértice de grau ímpar ao outro vértice de grau ímpar.

A proposição

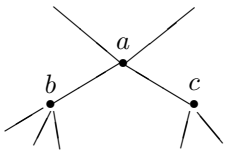
$$p(1)$$

é, assim, uma proposição verdadeira.

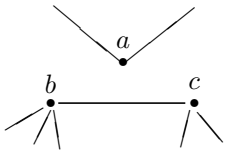
(ii) – Suponha-se agora, hipótese de indução, que $p(m)$ é verdadeira para todo o $m \leq k$ e vejamos o que se passa com $p(k+1)$. Seja $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ um grafo conexo com $k+1$ arestas que tem 2 ou menos vértices de grau ímpar. O método de prova agora consiste em reduzir para $k$ o número de arestas a fim de usar a hipótese de indução. O problema que se levanta é o de que o grafo seja desconectado durante o processo.

Visto que a proposição $p(1)$ já foi provada pode admitir-se que $\mathcal{G}$ tem mais de duas arestas (que não são lacetes) e, portanto, possui pelo menos um vértice de

grau par positivo. Seja $a$ esse vértice. Pode então garantir-se que há pelo menos duas arestas incidentes em $a$ que se denotarão, respectivamente, por $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$.




Construa-se agora um novo grafo $\mathcal{G}' \equiv (V', E')$ onde $V' = V$ e $E'$ é igual a $E$ exceptuando as arestas $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ que foram retiradas e substituídas por uma nova aresta $\{b, c\}$




O grafo $\mathcal{G}'$ tem $k$ arestas e o mesmo número de vértices ímpares que $\mathcal{G}$. Há então duas possibilidades: ou $\mathcal{G}'$ é conexo ou é desconexo.

Se $\mathcal{G}'$ for conexo então, pela hipótese de indução, pode encontrar-se um caminho euleriano em $\mathcal{G}'$. Este caminho pode tornar-se um caminho euleriano em $\mathcal{G}$ substituindo a parte do caminho que usa a aresta $\{b, c\}$ pela sequência de vértices $bac$ que usa as arestas $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$.

Se $\mathcal{G}'$ for desconexo, o problema fica um pouco mais complicado. Neste caso $\mathcal{G}'$ possui duas componentes conexas: uma contém o vértice $a$ e a outra contém os vértices $b$ e $c$ (é claro que $b$ e $c$ devem estar na mesma componente conexa porque $\mathcal{G}'$ contém a aresta $\{b, c\}$). Designem-se estas duas componentes conexas por $\mathcal{G}'_a$ e $\mathcal{G}'_{bc}$, respectivamente. Cada uma destas componentes constitui um grafo conexo com $k$ ou menos arestas. O grafo $\mathcal{G}'$ tem exactamente o mesmo número de vértices de grau ímpar que $\mathcal{G}$: assim, nas duas componentes não há mais que dois vértices de grau ímpar, pelo que se pode aplicar a hipótese de indução tanto a $\mathcal{G}'_a$ como a $\mathcal{G}'_{bc}$.

Se $\mathcal{G}$ tiver 0 vértices de grau ímpar então nenhuma das componentes $\mathcal{G}'_a$ e $\mathcal{G}'_{bc}$ possui vértices de grau ímpar; se $\mathcal{G}$ tiver 2 vértices de grau ímpar então, tendo em conta o corolário 4.9), uma das componentes terá 2 vértices de grau ímpar e a outra componente terá 0 vértices de grau ímpar.

Há, assim, três situações distintas:

- 2 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_a$ e 0 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_{bc}$,
- 2 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_{bc}$ e 0 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_a$,
- 0 vértices de grau ímpar tanto em $\mathcal{G}'_a$ como em $\mathcal{G}'_{bc}$.

Considere-se o primeiro caso: 2 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_a$ e 0 vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_b$. Se há dois vértices de grau ímpar em $\mathcal{G}'_a$, tendo em conta a hipótese de indução, existe um caminho euleriano de $\mathcal{G}'_a$

$$i_1 x_1 \ldots x_m a x_{m+1} \ldots x_k i_2$$

que liga os dois vértices $i_1$ e $i_2$ de grau ímpar. Pela hipótese da indução também se sabe que existe em $\mathcal{G}'_{bc}$ um circuito euleriano

$$w_1 \ldots w_p b c w_{p+1} \ldots w_1$$

Removendo $\{b, c\}$ do circuito e ligando estes dois vértices ao outro caminho de acordo com

$$i_1 x_1 \ldots x_m a c w_{p+1} \ldots w_1 \ldots w_p b a x_{m+1} \ldots x_k i_2$$

obtém-se um caminho euleriano do grafo $\mathcal{G}$ (note-se que $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ estão incluídos e que $\{b, c\}$ desapareceu). Então, neste caso, tem-se

$$p(1), p(2), \ldots, p(k) \;\Rightarrow\; p(k+1)$$

Invocando agora o princípio de indução matemática fica demonstrado que, neste caso, se o número de vértices de grau ímpar for 0 ou 2 o grafo admite um circuito ou caminho euleriano.

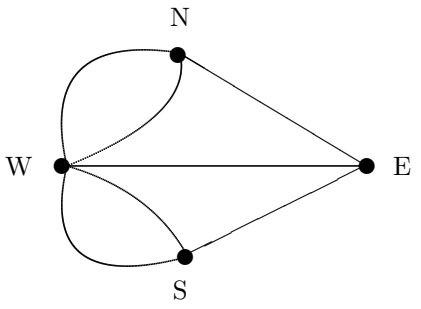
As duas situações restantes tratam-se de forma semelhante.

Reciprocamente, suponha-se que o grafo admite o seguinte caminho euleriano

$$a x_1 \ldots x_n b$$

Cada um dos vértices $x_i$ ocorre em duas arestas pelo que o seu grau é par. Os únicos vértices que podem ter grau ímpar são, assim, os vértices $a$ e $b$. Se $a = b$ todos os vértices têm grau par; se $a \neq b$ há apenas dois vértices de grau ímpar. □

**Exemplo 4.23** Regressando ao problema das pontes de Königsberg, recorde-se que o grafo que lhe corresponde é o seguinte:




Neste grafo com 4 vértices todos eles têm grau ímpar: de acordo com o teorema, tal grafo não possui qualquer caminho (ou circuito) euleriano. Ficou assim resolvido, de uma vez por todas, pela negativa, o problema dos habitantes de Königsberg (Kaliningrad).

**Caminhos hamiltonianos.** Um problema relacionado com o anterior, mas consideravelmente de maior dificuldade de resolução foi colocado pelo matemático irlandês W. Hamilton (1805-1865).

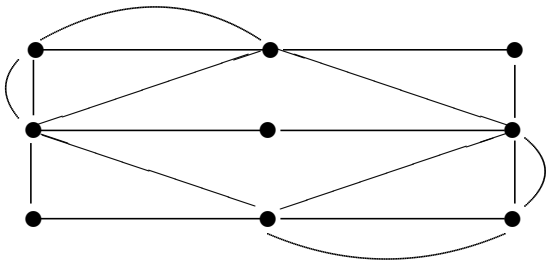
**Definição 4.24** *Seja $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ um grafo. Um caminho de $\mathcal{G}$ diz-se* **hamiltoniano** *se passar uma e uma só vez por cada um dos vértices do grafo.*

Embora o problema da existência de ciclos hamiltonianos possa parecer semelhante ao problema da determinação de circuitos eulerianos de um grafo, a verdade é que não é nada fácil dizer se um grafo é ou não hamiltoniano em geral. Há alguns resultados parcelares, mas não há resultados gerais.

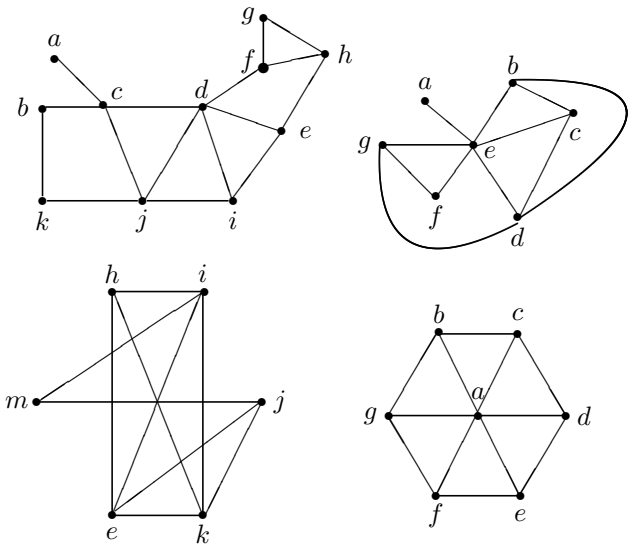
**Exemplo 4.25** No exemplo 4.3 foi introduzido o chamado **problema do caixeiro viajante** que pretende elaborar um percurso no qual visite cada cidade exactamente uma vez voltando depois ao ponto de partida. Um tal percurso constitui um ciclo hamiltoniano. Se tais ciclos hamiltonianos existirem o problema que se segue então é o da determinação do percurso (ciclo hamiltoniano) de custo mínimo. O problema do caixeiro viajante, de descrição muito simples, faz parte de uma classe de problemas bem conhecidos que são de resolução geralmente muito difícil.

### Exercícios 4.3.1

1. *Determinar um circuito euleriano no seguinte grafo*



2. *Verificar se algum dos grafos que se seguem possui um caminho euleriano. Determiná-lo no caso afirmativo e justificar os casos negativos.*



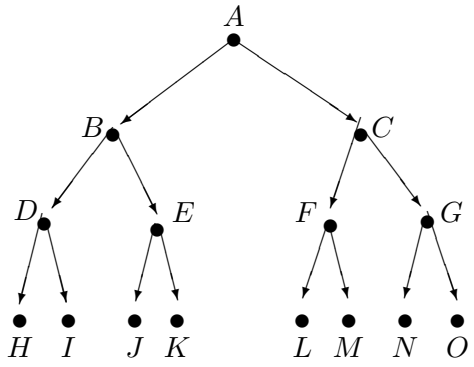

## 4.4 Árvores e Florestas

Esta secção é dedicada a um tipo especial de grafos que tem grande importância nas ciências da computação.

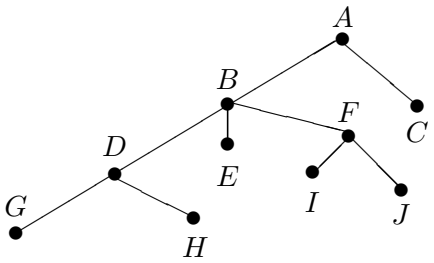
**Definição 4.26** *Dir-se-á que um grafo $T$ é uma árvore se possuir as duas propriedades seguintes:*

**T1** – *$T$ é um grafo conexo,*
**T2** – *não existem ciclos em $T$.*

Uma árvore pode ser dirigida ou não dirigida consoante $T$ seja um digrafo ou, simplesmente, um grafo. O termo árvore sem qualquer qualificativo interpreta-se sempre no sentido de ser uma árvore não dirigida. O digrafo




é um exemplo de uma árvore dirigida. O grafo



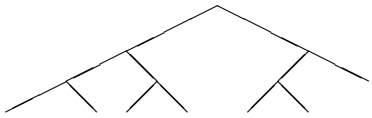

é um exemplo de uma árvore.

As árvores (orientadas ou não) têm muitas aplicações. São especialmente adequadas para representar estruturas hierarquizadas. Em *"coding theory"* e *"searching"* usam-se tipos de árvores especiais que são conhecidas por árvores binárias.

**Definição 4.27** *Um grafo diz-se uma árvore binária se for uma árvore e*

1. *possuir um vértice especial, chamado* **raiz** *cujo grau é 2 ou 0,*
2. *qualquer outro vértice (para além da raiz) tem grau 3 ou 1.*

A árvore da figura que se segue



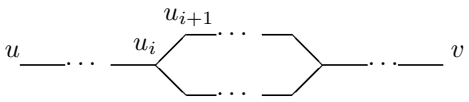
é um exemplo de uma árvore binária.

Enunciar-se-ão agora algumas propriedades importantes das árvores.

**Teorema 4.28** *Numa árvore $T$ existe um único caminho simples entre cada par de vértices.*

**Demonstração:** Sejam $u$ e $v$ dois vértices quaisquer de uma árvore $T$. Visto que $T$ é um grafo conexo então existe pelo menos um caminho entre $u$ e $v$ e, portanto, existe um caminho simples entre aqueles dois vértices. Suponha-se que, se possível, $P$ e $P'$ são dois caminhos simples entre aqueles dois vértices. Se $P$ e $P'$ forem diferentes então existe uma aresta que pertence a um e não pertence ao outro. Suponha-se que $e$ é a primeira aresta que está em $P$ mas não em $P'$ quando se caminha de $u$ para $v$, isto é, suponha-se que se tem

$$\begin{array}{lcccccc} P: & u \ldots\ldots & u_i & \overset{e}{\ldots} & u_{i+1} & \ldots\ldots & v \\ P': & u \ldots\ldots & u_i & \ldots & v_{i+1} & \ldots\ldots & v \end{array}$$




Seja $W$ o conjunto de vértices intermédios de $P$ situados entre $u_{i+1}$ e $v$ e seja $W'$ o conjunto de vértices intermédios de $P'$ situados entre $v_{i+1}$ e $v$. Se $W$ e $W'$ não tiverem quaisquer elementos comuns, então obter-se-á um ciclo percorrendo todos os vértices de $W$ a partir de $u_i$ e depois todos os vértices de $W'$ (desde $v$ até $u_i$). Esta hipótese não pode ocorrer pois $T$ não possui ciclos, por hipótese.

Por outro lado, supondo que $W$ e $W'$ têm vértices comuns seja $u_r$ o primeiro vértice de $P$ que pertence também a $W'$ de tal forma que nenhum vértice entre $u_i$ e $u_r$ está em $P'$. Então obtém-se novamente um ciclo partindo de $u_i$ até $u_r$ em $P$ e de $u_r$ a $u_i$ em $P'$.

Quer dizer, a hipótese de existir mais que um caminho simples entre dois vértices distintos de $T$ implica a existência de um ciclo em $T$. Como $T$ não possui ciclos então entre dois vértices quaisquer de $T$ há apenas um caminho simples. □

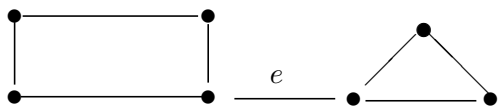
O recíproco é também verdadeiro no seguinte sentido:

**Teorema 4.29** *Se num grafo $\mathcal{G}$ existir apenas um único caminho simples entre dois quaisquer dos seus vértices, então $\mathcal{G}$ é uma árvore.*

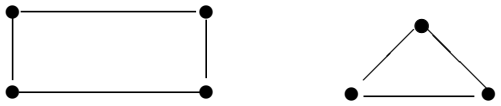
**Demonstração:** Suponha-se que $\mathcal{G}$ não é uma árvore. Então existe pelo menos um ciclo $C$ em $\mathcal{G}$ o que implica que entre dois vértices de $C$ existem dois caminhos simples contradizendo assim a hipótese feita. Então $\mathcal{G}$ é uma árvore, como se tinha afirmado. □

**Definição 4.30** *Uma aresta de um grafo conexo é designada por* **ponte** *se a sua remoção (sem retirar os vértices) tornar o grafo desconexo.*

Por exemplo, no grafo




a aresta $e$ é uma ponte: de facto a sua remoção origina o grafo



que é desconexo. Então, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 4.31** *Numa árvore cada aresta é uma ponte.*

**Demonstração:** Visto que uma aresta entre dois vértices $a$ e $b$ de uma árvore $T$ é o único caminho entre eles, então a sua supressão transforma $T$ num grafo desconexo deixando, portanto, de ser uma árvore. □

Reciprocamente,

**Teorema 4.32** *Se $\mathcal{G}$ for um grafo conexo no qual cada aresta é uma ponte então $\mathcal{G}$ é uma árvore.*

**Demonstração:** Suponha-se que $\mathcal{G}$ não é uma árvore, seja $C$ um ciclo em $\mathcal{G}$ e suponha-se que $e$ designa uma aresta em $C$. Seja $\mathcal{G}'$ o grafo que se obtém suprimindo a aresta $e$ em $\mathcal{G}$. Visto que, por hipótese, $e$ é uma ponte então $\mathcal{G}'$ é desconexo.

Sejam $p$ e $q$ dois vértices quaisquer de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é conexo existe um caminho $P$ entre $p$ e $q$. Se $P$ não contiver $e$ então existe também um caminho entre $p$ e $q$ no grafo desconexo $\mathcal{G}'$. Por outro lado, se $e = \{v, w\}$ for uma aresta de $P$ que também pertence ao ciclo $C$ que parte, por exemplo, do vértice $t$, obtém-se o seguinte caminho em $\mathcal{G}'$ entre $p$ e $q$

$$p \ldots\ldots v \ldots\ldots t \ldots\ldots w \ldots\ldots q$$

(substitui-se a aresta $e$ pelo resto do circuito $C$ que vai de $v$ a $w$). Por outras palavras, existe sempre um caminho entre cada par de vértices de $\mathcal{G}'$ o que contraria o facto de $\mathcal{G}'$ ser desconexo. □

**Teorema 4.33** *Uma árvore $T$ com $n$ vértices tem $n-1$ arestas.*

**Demonstração:** Far-se-á a demonstração por indução sobre $n$.

(i) – A proposição é evidentemente verdadeira para $n = 1$ (uma vez que numa árvore não pode haver lacetes).

(ii) – Suponha-se que a proposição é verdadeira para todo o $m$ natural tal que $1 < m < n$. Seja $e = \{u, v\}$ uma aresta de $T$ a qual, como $T$ é uma árvore, tendo em conta o teorema anterior, é uma ponte.

Suprimindo a aresta $e$ obtém-se um subgrafo $T'$ desconexo com duas componentes conexas $H$ e $H'$. Tanto $H$ como $H'$ são árvores com $k$ e $k'$ vértices que são números inteiros positivos tais que $k + k' = n$. Então tanto $k$ como $k'$ são menores que $n$. Pela hipótese de indução $H$ tem $k-1$ arestas e $H'$ tem $k'-1$ arestas e as duas componentes juntas têm $(k-1)+(k'-1) = (k+k')-2 = n-2$ arestas. Então $T'$ tem $n-2$ arestas e, consequentemente, $T$ tem $n-1$ arestas.

Fazendo apelo ao princípio de indução completa fica provado o teorema. □

O recíproco é também verdadeiro:

**Teorema 4.34** *Qualquer grafo conexo com $n$ vértices e $n-1$ arestas é uma árvore.*

**Demonstração:** Se $\mathcal{G} \equiv (V, E)$ não fosse uma árvore existiria uma aresta $e$ que não seria uma ponte. Suprima-se $e$ para obter o grafo $\mathcal{G}' \equiv (V, E')$. Continue-se este processo até obter um subgrafo $\mathcal{H} \equiv (V, F)$ no qual cada aresta seja uma ponte. Então $\mathcal{H}$ é uma árvore com $n-1$ arestas. Isto significa que após este processo de remoção de arestas acabou por se ficar com o mesmo número, ou seja, que o grafo inicial já era uma árvore. □

**Definição 4.35** *Um subgrafo $T$ de um grafo $\mathcal{G}$ com $n$ vértices diz-se uma* **árvore suporte de $\mathcal{G}$** *se*

1. *$T$ for uma árvore e*
2. *$T$ tiver exactamente $n$ vértices*

**Teorema 4.36** *Um grafo $\mathcal{G}$ é conexo se e só se possuir uma árvore suporte.*

**Demonstração:** Se $\mathcal{G}$ possuir uma árvore suporte então, visto que a árvore é conexa e possui o mesmo número de vértices que $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ é conexo.

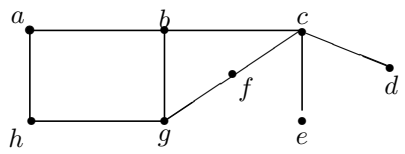
Reciprocamente, suponha-se que $\mathcal{G}$ é um grafo conexo. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vértices de $\mathcal{G}$. Seleccione-se um destes vértices e atribua-se-lhe a etiqueta 1. Considerem-se agora os vértices adjacentes ao vértice etiquetado por 1: escolha-se um destes vértices, atribua-se-lhe a etiqueta 2 e marque-se a aresta $\{1, 2\}$, que não pode voltar a ser usada. Procedendo de modo semelhante, suponha-se que se etiquetou o vértice $v_i$ com o número inteiro $k$. Procure-se entre os vértices adjacentes a $k$ se existe algum que ainda não esteja etiquetado: se tal se verificar, escolha-se um tal vértice, atribua-se-lhe a etiqueta $k + 1$ e marque-se a aresta $\{k, k + 1\}$ para não voltar a ser usada.

Pode, no entanto, acontecer que todos os vértices adjacentes a $k$ estejam já etiquetados. Neste caso recua-se para o vértice $k - 1$ e pesquisa-se a existência de vértices ainda não etiquetados adjacentes a $k - 1$. Se existir um atribua-se-lhe a etiqueta $k + 1$ e marque-se a aresta $\{k - 1, k + 1\}$ para não voltar a ser usada.

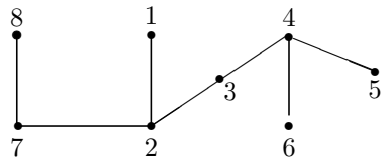
Continua-se este processo até que todos os vértices estejam etiquetados o que acontecerá necessariamente visto o grafo ser conexo. (Se o grafo não fosse conexo recuar-se-ia até ao vértice 1 antes de todos os vértices do grafo estarem etiquetados.)

O subgrafo constituído pelos $n$ vértices originais e as arestas marcadas é uma árvore – a árvore suporte do grafo. □

**Exemplo 4.37** Para exemplificar o processo descrito, considere-se o seguinte grafo




Então a árvore




é uma árvore geradora do grafo inicial.

**Definição 4.38** *Chama-se* **floresta** *a um grafo constituído por várias componentes conexas, cada uma das quais é uma árvore.*

### Exercícios 4.4.1

1. *Seja $\mathcal{G}$ uma floresta com $n$ vértices, $m$ arestas e $k$ componentes. Determinar $m$ em função de $n$ e $k$.*
2. *Suponha-se que uma árvore tem 2 vértices de grau 5, 3 vértices de grau 4, 6 vértices de grau 3, 8 vértices de grau 2 e $r$ vértices de grau 1. Determinar $r$.*
3. *Um grafo conexo tem 20 vértices. Determinar o número mínimo de arestas que o grafo pode ter.*
4. *Um grafo $\mathcal{G}$ tem 20 arestas. Determinar o número máximo de vértices que o grafo pode ter.*
5. *Suponha-se que $\mathcal{G}$ tem 4 componentes conexas, 20 arestas e $r$ vértices. Determinar o valor máximo de $r$.*
6. *Uma aresta $e$ de um grafo conexo $\mathcal{G}$ pertence a todas as possíveis árvores suporte de $\mathcal{G}$. Que se pode afirmar relativamente à aresta $e$?*