ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre dia 17 de julho de 2020 das 15h00 às 19h00 de Portugal Continental

Data de Limite de Entrega

17 de julho de 2020, até às 19h00 de Portugal Continental

Conteúdos

Álgebra Linear

Competências

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

Trabalho a desenvolver
Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste Exame é de 20 valores.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu Exame na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu Exame não deve ultrapassar 18 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do Exame, segundo o exemplo apresentado: 000000exame.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo Exame até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla. (*4 valores*)

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. • Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira. • Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

Questão 1

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Então:

- ☐ a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A é invertível.
- ☐ b) $\det A = x$.
- ☐ c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(2A) = 2 \det A$.
- ☐ d) A é invertível se e só se $x \in \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$.

Questão 2

Considere $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c + d)$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y, z) = (z, x, y)$. Então:

- ☐ a) $\operatorname{Nuc} g = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
- ☐ b) $(g \circ f)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, 1, 0)$.
- ☐ c) $\operatorname{Nuc} f = 0$.
- ☐ d) $\operatorname{Nuc} f \neq \operatorname{Nuc}(g \circ f)$.

Questão 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$. Então:

- ☐ a) $\det A = 0$.
- ☐ b) $\det A = 1$.
- ☐ c) $\det A = \det(A^{-1})$.
- ☐ d) $\det(A^{-1}) = 1$.

Questão 4

Sejam F e G subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$ definidos por
$F = \langle (1,2,2),\ (0,1,1),\ (1,0,0) \rangle$ e $G = \langle (1,0,1),\ (1,1,1),\ (0,1,0) \rangle$.

Então:

- ☐ a) $\dim(F+G) = 4$.
- ☐ b) $\dim(F \cap G) = 1$.
- ☐ c) $\dim(F \cup G) = 2$.
- ☐ d) $\dim F = 3$.

Questões de desenvolvimento

Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*2,5 valores*)

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são matrizes invertíveis, então $A + B$ é uma matriz invertível.

b) A sequência $\{1 + t + t^2, 1 + t, 1\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

III. (*3 valores*)

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

b) Verifique que as (eventuais) soluções que obteve satisfazem de facto o sistema.

IV. (*4 valores*)

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

c) Mostre que existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

V. (*4 valores*)

Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w & y \\ z & -x \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T é uma aplicação linear.

b) Determine o núcleo de T.

c) Determine a dimensão da imagem de T.

d) Determine se T é injetiva, e se T é sobrejetiva.

e) Considerando a base canónica em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ determine a matriz que representa T.

f) Determine se T é invertível, e em caso afirmativo determine a matriz que representa a inversa de T.

VI. (*2,5 valores*)

a) Seja $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $S = \left\{X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : M^T X = X M^T\right\}$.
Mostre justificadamente que S é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

b) Considere agora $n = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Determine uma base para $S = \left\{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M^T X = X M^T\right\}$.

FIM