21166 - História da Matemática

Ano lectivo 2017/18

Docente: António Araújo

e-fólio B (12 a 19 de janeiro de 2018)

,

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 4 problemas e termina com a palavra FIM.
- **A resolução deve ser inteiramente manuscrita.** Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam impecavelmente legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar ou fotografar a sua resolução de forma legível, e entregar de preferência em pdf, embora se aceitem scans ou fotografias em jpeg ou png. Se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip. Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores, igualmente distribuídos por 4 questões.

GRUPO I - Índia

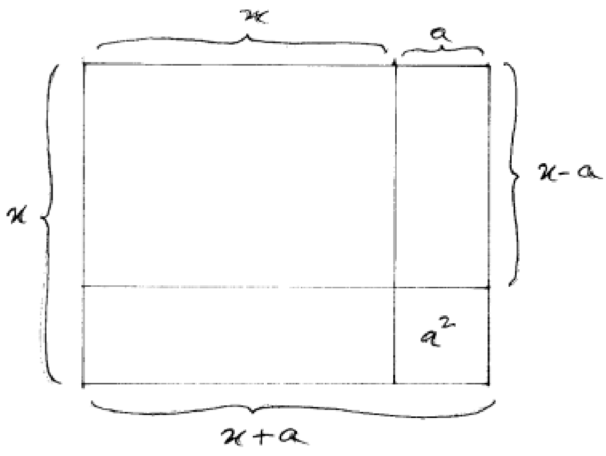
Problema 1. *Usando os lemas de Brahmagupta, obtenha duas soluções inteiras não triviais para a equação* $79x^2 + 1 = y^2$.

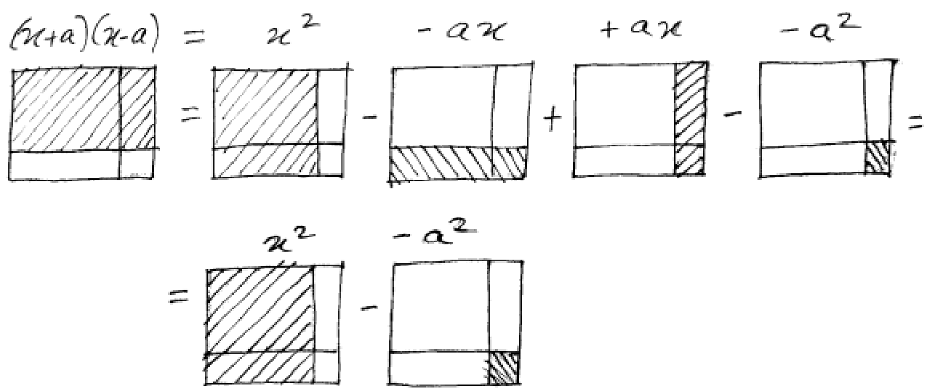
Solução: Procuramos uma solução aproximada. Escolhendo $(a, b) = (1, 9)$ obtemos uma solução para $79x^2 + 2 = y^2$. Então pelo primeiro lema de Brahmagaupta (com $k = k' = 2$ e com ambas as soluções iguais a (a, b)), temos que (com $n = 79$), $(2ab, b^2+na^2) = (18, 160)$ é solução de $79x^2+4 = y^2$. Mas então pelo segundo lema, $(a', b') = (18/2, 160/2) = (9, 80)$ é solução de $79x^2 + 1 = y^2$. Aplicando de novo o primeiro lema a (a', b') com $k = k' = 1$, temos que $(2a'b', b'^2 + na'^2) = (1440, 12799)$ é outra solução de $79x^2 + 1 = y^2$.

GRUPO II - Islão

Problema 2. *Mostre, à maneira de Al-Khwarizmi (ver página 419 do manual), que* $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Solução:





Problema 3. *Encontre uma raíz real da cúbica*

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

pelo método de Tartaglia-Cardano. Recorde que deve começar por colocar a equação numa forma adequada.

Solução:

Em geral, podemos eliminar o termo quadrático de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com a transformação $x \mapsto y - \dfrac{b}{3a}$. Neste caso, com $a = 1, b = 2$, fazemos $x \mapsto y - 2/3$. Fazendo a substituição, obtemos a equação

$$y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}.$$

que está na forma $y^3 + py = q, p, q > 0$, pelo que podemos aplicar a fórmula de Cardano para obter uma solução igual a

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{704}{54} + \sqrt{\left(\frac{704}{54}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{704}{54} + \sqrt{\left(\frac{704}{54}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{352}{27} + 2\sqrt{\frac{1310}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{352}{27} + 2\sqrt{\frac{1310}{3}}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} - \sqrt[3]{-352 + 6\sqrt{3930}}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente, $x = y - \dfrac{2}{3}$, é solução da cúbica original, ou seja

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} - \sqrt[3]{-352 + 6\sqrt{3930}} - 2\right)$$

Problema 4. *Faça uma breve exposição (no máximo uma página e meia) sobre a origem dos números complexos e a sua relação com o estudo das cúbicas.*

FIM