ANÁLISE DE FOURIER E APLICAÇÕES | 21161

Período de Realização

Decorre de 6 a 13 de dezembro de 2019

Data de Limite de Entrega

13 de dezembro de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Temas

Temas 3, 4 e 5 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes aos temas indicados supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 0,5 + 1,5 valores

2. 1,0 valores

Total: 3,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Considere um recipiente de base quadrada com área L^2 e que está cheio de água até uma altura $2L$. No instante inicial $t = 0$ introduz-se instantaneamente uma substância química Q à superfície da água cuja concentração, num sistema de coordenadas ortonormadas (x, y, z) centrada no ponto central da superfície da água, é descrita aproximadamente pela função $f(x, y, z) = \chi_I(x, y, z)$, onde $I = [-L/10, L/10] \times [-L/10, L/10] \times [-L/100, 0]$ e χ_I é a função característica[1] do conjunto I.

A evolução da concentração $q = q(x, y, z, t)$ da substância química Q no instante t e na posição (x, y, z) do recipiente é descrita pela equação de difusão

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D\Delta_{(x,y,z)}q,$$

onde $D > 0$ é o coeficiente de difusão de Q, $\Delta_{(x,y,z)}$ é o laplaciano relativamente às coordenadas espaciais, com a condição inicial $q(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ e esta equação é complementada com condições apropriadas na fronteira.

[1] A função característica de um conjunto Ω é definida por

$$\chi_\Omega(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in \Omega \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Supondo que o recipiente não é poroso nem existe evaporação da água, diga, justificadamente, quais são as condições na fronteira apropriadas à presente situação.

b. Determine a solução formal do problema de valores iniciais e de fronteira para a situação descrita usando as condições na fronteira que indicou na alínea anterior.

2. Resolva o exercício 3.2 na página 184 do livro de Djairo Figueiredo.

FIM

RESOLUÇÃO

1.a. A hipótese básica dos processos difusivos (que se verifica experimentalmente ser uma razoavelmente boa aproximação da realidade) é que o fluxo de uma substância através de uma determinada superfície (orientável) é proporcional, em cada ponto (x, y, z) da superfície, ao produto interno do gradiente da concentração dessa substância, $\nabla q(x, y, z)$, com a normal exterior unitária $\nu(x, y, z)$ à superfície.

Assim, sob as hipóteses do recipiente não ser poroso nem existir evaporação à superfície (e da água estar em repouso e a introdução da substância química Q não perturbar essa situação) tem-se que não ocorrerá fluxo da substância nas paredes do recipiente nem na superfície da água.

A água e a substância química Q ocupam a região

$$\Omega =]-L/2, L/2[\times]-L/2, L/2[\times]-2L, 0[.$$

A superfície da água é descrita por

$$\partial\Omega_1 := [-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2] \times \{0\}$$

e a normal exterior unitária em pontos desta superfície é $\nu_1(x, y, 0) = (0, 0, 1)$, pelo que a condição de não-evaporação resulta em

$$0 = \nu_1 \cdot \nabla q = (0, 0, 1) \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z}\right) = \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Este mesmo argumento pode ser aplicado a cada uma das paredes laterais do recipiente a ainda ao seu fundo. Tendo presente que as paredes laterais com x constante são

$$\partial\Omega_2 := \{-L/2\} \times [-L/2, L/2] \times [-2L, 0] \quad \text{com normal } \nu_2 = (-1, 0, 0)$$

$$\partial\Omega_3 := \{L/2\} \times [-L/2, L/2] \times [-2L, 0] \quad \text{com normal } \nu_3 = (1, 0, 0)$$

concluímos que nessas paredes a condição de não-porosidade resulta em $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$.

Analogamente, nas paredes com y constante a condição na fronteira é $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$ e no fundo (que, tal como a superfície da água, tem z constante) temos $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$.

1.b. Sob a hipótese de podermos escrever a concentração q como o produto de funções dependendo de uma só variável, o seja, $q(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ a equação de difusão fica

$$X(x)Y(y)Z(z)T'(t) = D\Big(X''(x)Y(y)Z(z)+X(x)Y''(y)Z(z)+X(x)Y(y)Z''(z)\Big)T(t).$$

Supondo que nos pontos (x,y,z,t) a função q não é nula podemos dividir esta última equação por $q = q(x,y,z,t)$ e obter

$$\frac{1}{D}\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) + \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z).$$

Como nesta última equação o membro direito é independente de t e o membro esquerdo é independente de x, y e z, e como a equação tem de ser válida em todos os pontos do conjunto *aberto* Ω, concluímos que terá de existir (pelo menos) uma constante real σ tal que

$$\frac{1}{D}\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x) + \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z), \quad \forall(x,y,z,t) \in I \times \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Tomemos a equação

$$\sigma = \frac{X''}{X}(x) + \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z).$$

Se a reescrevermos como

$$-\frac{X''}{X}(x) + \sigma = \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z)$$

constatamos imediatamente uma situþo análoga à anterior: o membro direito é independente da variável x e o membro esquerdo é independente da variáveis y e z. Para que tal seja possível e a igualdade entre estes dois membros seja válida em todos os pontos do aberto I é necessário que exista (pelo menos) uma constante μ tal que

$$-\frac{X''}{X}(x) + \sigma = \mu = \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z).$$

Finalmente, tomemos a equação

$$\mu = \frac{Y''}{Y}(y) + \frac{Z''}{Z}(z) \;\Leftrightarrow\; -\frac{Y''}{Y}(y) + \mu = \frac{Z''}{Z}(z).$$

O mesmo argumento permite concluir que tem de existir (pelo menos) uma constante real ξ tal que

$$-\frac{Y''}{Y}(y) + \mu = \xi = \frac{Z''}{Z}(z).$$

Por este processo de separação de variáveis obtemos os problemas de valores na fronteira seguintes, onde as condições na fronteira são obtidas diretamente a partir do que se apresentou na alínea anterior e da hipótese de que $q = XYZT$, o que resulta em $\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow X' = 0$, etc.

$$\begin{cases} Z'' - \xi Z = 0 \\ Z'(-2L) = 0 = Z'(0) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} Y'' - (\mu - \xi) Y = 0 \\ Y'(-L/2) = 0 = Y'(L/2) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} X'' - (\sigma - \mu) X = 0 \\ X'(-L/2) = 0 = X'(L/2) \end{cases} \tag{4}$$

Experimentando, como usualmente, diversos casos (positivos, negativos, ou nulo) para ξ conclui-se que as soluções não nulas de (2) são obtidas para $\xi = \xi_k = -\frac{k^2\pi^2}{4L^2}$, e são

$$Z_k(z) = \cos(\tfrac{k\pi}{2L} z), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

e combinações lineares destas funções.

Exatamente o mesmo argumento aplicado ao problema (3) permite concluir que as constantes μ têm de ser tais que $\mu - \xi = -\frac{(2\ell+1)^2\pi^2}{L^2}$, e as correspondentes soluções são

$$Y_\ell(y) = \cos(\tfrac{(2\ell+1)\pi}{L} y), \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{6}$$

e combinações lineares destas funções.

Analogamente concluímos que, para (4), temos de ter σ tal que $\sigma - \mu = -\frac{(2m+1)^2\pi^2}{L^2}$, com as correspondentes soluções

$$X_m(y) = \cos(\tfrac{(2m+1)\pi}{L} x), \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

e combinações lineares destas funções.

Conclui-se, então, que

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma - \mu) + (\mu - \xi) + \xi \\ &= -\frac{(2m+1)^2\pi^2}{L^2} - \frac{(2\ell+1)^2\pi^2}{L^2} - \frac{k^2\pi^2}{4L^2} \\ &= -\frac{(k^2 + 4(2\ell+1)^2 + 4(2m+1)^2)\pi^2}{4L^2}, \qquad \forall (k,\ell,m) \in \mathbb{N}_0^3, \end{aligned}$$

e a equação para a função $T(t)$ é, a partir de (1),

$$T'(t) = -\frac{(k^2+4(2\ell+1)^2+4(2m+1)^2)\pi^2}{4L^2}T(t),$$

cuja única solução linearmente independente é

$$T(t) = \exp\Big(-\frac{(k^2+4(2\ell+1)^2+4(2m+1)^2)\pi^2}{4L^2}Dt\Big)$$

A solução formal do problema de valores na fronteira é, então, obtida por combinação linear arbitrária das funções $X_m(x)Y_\ell(y)Z_k(z)T_{k,\ell,m}(t)$, ou seja:

$$q(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,\ell,m}\exp\Big(-\tfrac{(k^2+4(2\ell+1)^2+4(2m+1)^2)\pi^2}{4L^2}Dt\Big)\times$$
$$\times\cos(\tfrac{(2m+1)\pi}{L}x)\cos(\tfrac{(2\ell+1)\pi}{L}y)\cos(\tfrac{k\pi}{2L}z). \quad (8)$$

Os coefficientes $a_{k,\ell,m}$ são determinados a partir da condição inicial $q(x,y,z,0) = f(x,y,z)$, onde f é a função dada no enunciado: $f(x,y,z) = \chi_I(x,y,z)$. Portanto, os coeficientes terão os coeficientes de Fourier da série de Fourier de cosenos de χ_I

$$\chi_I(x,y,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\cos(\tfrac{k\pi}{2L}z) \quad (9)$$

Para determinar estes coeficientes procede-se como no caso de uma dimensão estudado no livro (vd. secção 2.3), multiplicando sucessivamente (9) por um coseno dependendo de cada uma das variáveis x, y e z, e integrando integrando sucessivamente. Como a função no membro direito de (9) é uma multiplicação de cosenos cada um deles dependendo apenas de uma das variáveis as integrações fazem-se como em uma dimensão. Ilustremos o processo: dado que I é o produto cartesiano de três intervalos, a função χ_I pode ser escrita como um produto de funções características dos intervalos $J_1 = [-L/10, L/10]$ e $J_2 = [-L/100, 0]$, a saber

$$\chi_I(x,y,z) = \chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\chi_{J_2}(z).$$

Concentremo-nos na dependência na variável z. Para que tenhamos uma série de Fourier de cosenos temos de considerar o prolongamento par desta função a $\mathbb{R}$ como função $4L$-periódica. Multiplicando ambos os membros de (9) por $\cos\frac{k'\pi z}{2L}$ e integrando num período $[-2L, 2L]$ tem-se, proveniente do membro esquerdo de (9) (quando $k' \neq 0$):

$$\begin{aligned}\int_{-2L}^{2L} \chi_I(x,y,z)\cos\tfrac{k'\pi z}{2L}dz &= \chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\int_{-2L}^{2L}\chi_{J_2}(z)\cos\tfrac{k'\pi z}{2L}dz\\ &= 2\chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\int_0^{\frac{L}{100}}\cos\tfrac{k'\pi z}{2L}dz\\ &= \chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\tfrac{4L}{k'\pi}\sin\tfrac{k'\pi}{200},\end{aligned} \tag{10}$$

e, proveniente do membro direito de (9), tem-se, formalmente,

$$\begin{aligned}&\int_{-2L}^{2L}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\cos(\tfrac{k\pi}{2L}z)\cos\tfrac{k'\pi z}{2L}dz =\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\int_{-2L}^{2L}\cos(\tfrac{k\pi}{2L}z)\cos\tfrac{k'\pi z}{2L}dz\\ &= 2L\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k',\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\end{aligned} \tag{11}$$

Consequentemente a equação (9) permite-nos escrever

$$\chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\tfrac{4L}{k'\pi}\sin\tfrac{k'\pi}{200} = 2L\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k',\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y), \tag{12}$$

e $k' \in \mathbb{N}_+$ (para $k' = 0$ há que refazer estes cálculos tendo presente que $\cos(0\pi z/2L) \equiv 1$.) Agora repete-se o processo, sucessivamente para as restantes variáveis: multiplicando ambos os membros de (12) por $\cos\frac{\ell'\pi y}{2L}$ e integrando entre $[-2L, 2L]$ tem-se, proveniente do membro esquerdo de (12) (quando $\ell' \neq 0$),

$$\begin{aligned}&\int_{-2L}^{2L}\chi_{J_1}(x)\chi_{J_1}(y)\tfrac{4L}{k'\pi}\sin\tfrac{k'\pi}{200}\cos\tfrac{\ell'\pi y}{2L}dy =\\ &= 2\chi_{J_1}(x)\tfrac{4L}{k'\pi}\sin\tfrac{k'\pi}{200}\int_0^{\frac{L}{10}}\cos\tfrac{\ell'\pi y}{2L}dy\\ &= \chi_{J_1}(x)\tfrac{(4L)^2}{k'\ell'\pi^2}\sin\tfrac{k'\pi}{200}\sin\tfrac{\ell'\pi}{20},\end{aligned} \tag{13}$$

e, proveniente do membro direito de (12), tem-se, formalmente,

$$2L\int_{-2L}^{2L}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{k',\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\cos\tfrac{\ell'\pi y}{2L}dy =$$
$$= 2L\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{k',\ell,m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x)\int_{-2L}^{2L}\cos(\tfrac{2(2\ell+1)\pi}{2L}y)\cos\tfrac{\ell'\pi y}{2L}dy =$$
$$= (2L)^2\sum_{m=0}^{\infty}a_{k',\ell',m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x) \qquad (14)$$

com $\ell' = 2(2\ell+1)$, e $\ell \in \mathbb{N}_0$.

A equação (9) permite, então, escrever (13) = (14), ou seja

$$\chi_{J_1}(x)\tfrac{(4L)^2}{k'\ell'\pi^2}\sin\tfrac{k'\pi}{200}\sin\tfrac{\ell'\pi}{20} = (2L)^2\sum_{m=0}^{\infty}a_{k',\ell',m}\cos(\tfrac{2(2m+1)\pi}{2L}x), \qquad (15)$$

e, finalmente, multiplicando agora ambos os membros por $\cos\frac{m'\pi x}{2L}$ e integrando em $[-2L, 2L]$ obtém-se (quando $m' \neq 0$)

$$\tfrac{(4L)^3}{k'\ell'm'\pi^3}\sin\tfrac{k'\pi}{200}\sin\tfrac{\ell'\pi}{20}\sin\tfrac{m'\pi}{20} == (2L)^3 a_{k',\ell',m'}$$

com $\ell' = 2(2\ell+1), m' = 2(2m+1)$, e $\ell, m \in \mathbb{N}_0$. (Com cálculos análogos quando $m' = 0$.) Ou seja, os coeficientes de Fourier da solução formal (8) são dados por

$$a_{k,\ell,m} = \tfrac{2}{k(2\ell+1)(2m+1)\pi^3}\sin\tfrac{k\pi}{200}\sin\tfrac{(2\ell+1)\pi}{10}\sin\tfrac{(2m+1)\pi}{10}$$

e expressões análogas, obtidas pelo mesmo método de integração, quando algum dos índices for nulo.

2. Multiplicando a equação das ondas $u_{tt} = c^2u_{xx}$ por u_t e integrando na variável x entre 0 e L obtém-se, após uma integração por partes do membro direito,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\big((u_t)^2 + c^2(u_x)^2\big)dx = c^2\Big(u_x(L,t)u_t(L,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\Big).$$

Usando as condições na fronteira o membro direito pode ser reescrito como $-\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\Big(\beta u(L,t)^2 + \alpha u(0,t)^2\Big)$ pelo que a equação da energia toma a forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\big((u_t)^2 + c^2(u_x)^2\big)dx = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\Big(\beta u(L,t)^2 + \alpha u(0,t)^2\Big),$$

a qual pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\int_0^L \big((u_t)^2 + c^2(u_x)^2\big)dx + c^2\big(\beta u(L,t)^2 + \alpha u(0,t)^2\big)}_{=:\mathcal{E}(t)}\Big) = 0, \qquad (16)$$

onde $\mathcal{E}(t)$ é a energia do sistema no instante de tempo t.

Suponhamos que v e u são duas soluções do mesmo problema de valores iniciais e de fronteira dado. Então $w := v - u$ é solução da mesma equação diferencial parcial das ondas (porque é uma equação linear e, portanto, combinações lineares de soluções são ainda soluções). A condição inicial satisfeita por w é, naturalmente, $w(x,0) = v(x,0) - u(x,0) = f(x) - f(x) = 0$ e analogamente $w_t(x,0) = 0$. As condições na fronteira satisfeitas por w são

$$\begin{aligned} w_x(L,t) + \beta w(L,t) &= v_x(L,t) - u_x(L,t) + \beta(v(L,t) - u(L,t)) \\ &= \Big(v_x(L,t) + \beta v(L,t)\Big) - \Big(u_x(L,t) + \beta u(L,t)\Big) \\ &= 0 - 0 \;=\; 0, \end{aligned}$$

e analogamente para a condição em $x = 0$. Observe-se agora que, quando $t = 0$, as condições iniciais forçam a que a energia da solução w satisfaça $\mathcal{E}(0) = 0$. Como, por (16), a energia da equação das ondas com estas condições na fronteira é conservada, tem-se $\mathcal{E}(t) = 0,\ \forall t$. Ou seja, como cada uma das parcelas que constituem a energia $\mathcal{E}(t)$ de w é não negativa, ter-se-á de verificar $(w_t)^2 + c^2(w_x)^2 \equiv 0$, $w(L,t) \equiv 0$ e $w(0,t) \equiv 0$. Mas isto implica que $w(x,t) = 0$, $\forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}$, o que significa que $v \equiv u$ e, portanto, a solução é única.