p-Fólio

**U.C. 21037**
**Elementos de Probabilidades e Estatística**
**7 de junho de 2019**

# - INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por 2 grupos de questões e contém 4 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular não gráfica. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

## Cotação e critérios de correção:

- Correcção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 2 grupos de questões é a seguinte:

| Questão | 1.1 | 1.2 | 1.3.1 | 1.3.2 | 1.3.3 | 1.3.4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 1.5 | 1.75 | 2.0 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 3.0 |

1 Os clientes da Hamburgueria KKBig, apreciam bastante o seu hamburguer KKBig Gourmet. Tendo à sua disposição os seguintes três ingredientes opcionais: molho de iogurte, cogumelos Portobello e lascas de banana da Madeira. Com base nos registos da Hamburgueria sobre os clientes que compram o KKBig Gourmet, sabe-se, que:

• 40%, 25% e 20% dos clientes escolhem molho de iogurte, cogumelos Portobello e lascas de banana da Madeira, respetivamente;

• 3% escolhem cogumelos Portobello e lascas de banana da madeira;

• 10% escolhem lascas de banana da madeira e não escolhem molho de iogurte;

• de entre os que escolhem molho de iogurte, 15% também escolhem cogumelos Portobello;

• 1% escolhem as três opções.

Dos registos de clientes da Hamburgeria KKBig seleciona-se, aleatoriamente, um cliente do hamburguer KKBig Gourmet.

1.1 Qual a probabilidade de o cliente escolher pelo menos um dos ingredientes opcionais?

1.2 Mostre que a probabilidade de o cliente escolher apenas dois dos ingredientes é 0.16.

1.3 Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de ingredientes opcionais escolhidos pelo cliente.

[1.3.1] Determine a função de probabilidade de $X$.

[1.3.2] Qual o valor esperado de $X$?

[1.3.3] Determine a probabilidade do cliente ter escolhido os três ingredientes opcionais sabendo que escolheu pelo menos um deles.

[1.3.4] Determine a função de probabilidade da variável aleatória $Y = |X - 2|$.

2 O número de bilhetes de comboio emitidos na estação de São Bento no Porto num dia, é modelado por uma variável aleatória real de média 50 e variância 50. Considerando que a compra de bilhetes se processa de forma independente, determine a probabilidade de, em 32 dias serem emitidos menos de 1679 bilhetes.

# FORMULÁRIO

## Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad se \quad P(B) > 0$$

## Teorema de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ é uma partição de $\Omega$ (espaço de resultados), então, $\forall B$ para o qual $P(B) > 0$, ter-se-à:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)}$$

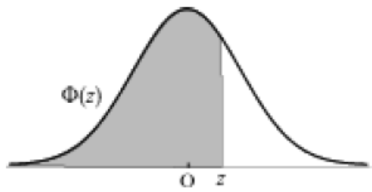
## Tabela de Distribuições

| | $P(X = k)$ ou $f(x)$ | $E(X)$ | $V(X)$ |
|---|---|---|---|
| $Unif(n)$ | $\frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| $Bin(n,p)$ | $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n, \quad 0 < p < 1$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| $G(p)$ | $p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| $H(N, M, n)$ | $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$ | $n\frac{M}{N}$ | $\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$ |
| $P(\lambda)$ | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $U(a, b)$ | $\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| $Exp(\lambda)$ | $\lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |

Note que: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$




| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **.0** | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| **.1** | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| **.2** | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| **.3** | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| **.4** | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| **.5** | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| **.6** | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| **.7** | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| **.8** | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| **.9** | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| **1.0** | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| **1.1** | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| **1.2** | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| **1.3** | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| **1.4** | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| **1.5** | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| **1.6** | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| **1.7** | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| **1.8** | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| **1.9** | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| **2.0** | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| **2.1** | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| **2.2** | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| **2.3** | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| **2.4** | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| **2.5** | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| **2.6** | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| **2.7** | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| **2.8** | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| **2.9** | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| **3.0** | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| **3.1** | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| **3.2** | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| **3.3** | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| **3.4** | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

| ε | .0005 | .0010 | .0050 | .0100 | .0200 | .0250 | .0500 | .1000 | .2000 | .3000 | .4000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_\varepsilon$ | 3.290 | 3.090 | 2.576 | 2.326 | 2.054 | 1.960 | 1.645 | 1.282 | .842 | .524 | .253 |
| $z_{\varepsilon/2}$ | 3.481 | 3.290 | 2.807 | 2.576 | 2.326 | 2.241 | 1.960 | 1.645 | 1.282 | 1.036 | .842 |

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon\,; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon\,.$$