Ministério da Educação e Ciência

**U.C. 21082**
**Matemática Finita**

**11 de junho de 2015**

# Critérios de avaliação

## Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

## Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

# Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

**Exame**: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** |
|---|---|---|---|
| **b)** | **d)** | **c)** | **b)** |

**P-fólio**: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

| **1.** | **2.** | **3.** |
|---|---|---|
| **d)** | **c)** | **b)** |

**5.** (**Exame**: 3.0 valores)

**5.1.** (**Exame**: 1.50 valores)
Tal como no Exercício 13b) da Actividade Formativa 1, existem $n!(n+1)!$ maneiras diferentes para se sentar todos os homens e todas as mulheres na bancada de modo que nenhum par de homens fique em lugares contíguos.

**5.2.** (**Exame**: 1.50 valores)
Dado o conjunto de $n$ homens e $n$ mulheres, existem

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

maneiras diferentes de se formarem subconjuntos com $0 \leq k \leq n$ homens e $k$ mulheres: de entre os $n$ homens podemos escolher $k$ homens de $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes e, fixado um tal grupo de $k$ homens, existem $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes para se escolherem $k$ mulheres entre as $n$ iniciais. Desta forma existem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

subconjuntos nas condições pedidas.

**6.** (**Exame**: 3.0 valores)

**6.1.** (**Exame e P-fólio**[1]: 1.50 valores)
Veja, por exemplo, a resolução do Exercício 19 da Actividade Formativa 1.

**6.2.** (**Exame**: 1.50 valores)
Pelo binómio de Newton tem-se

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)^2 = (2^n)^2 = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

[1] Pergunta 4 do P-fólio.

**7.** (**Exame**: 5.0 valores)

**7.1.** (**Exame e P-fólio**[2]: 2.0 valores)

**Case Base: n = 1**. Neste caso tem-se

$$4 \cdot 1^3 - 1 = 3$$

que é divisível por 3.

**Hipótese de indução:** Dado $n \geq 1$, **qualquer**, suponhamos que 3 é um divisor de $4n^3 - n$. Isto é, $4n^3 - n = 3m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

**Tese de indução:** 3 é um divisor de $4(n+1)^3 - (n+1)$.

Para se provar a tese de indução note-se que

$$\begin{aligned} 4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\ &= (4n^3 - n) + (12n^2 + 12n + 3) \\ &= (4n^3 - n) + 3(4n^2 + 4n + 1). \end{aligned}$$

Assim, atendendo a que pela hipótese de indução $4n^3 - n = 3m$, tem-se que

$$4(n+1)^3 - (n+1) = 3\underbrace{(m + 4n^2 + 4n + 1)}_{\in \mathbb{Z}},$$

o que prova que 3 é divisor de $4(n+1)^3 - (n+1)$. Fica assim provada a tese de indução.

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer $n \in \{1, 2, \ldots\}$, 3 é um divisor de $4n^3 - n$.

**7.2.** (**Exame e P-fólio**[3]: 1.50 valores)

Supondo que $n$ é par, digamos, $n = 2m$, $m \geq 1$, tem-se

$$4n^3 - n = (4n^2 - 1)n = 2\underbrace{(16m^2 - 1)m}_{\in \mathbb{N}},$$

que é um número par. Reciprocamente, se $4n^3 - n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, é um número par, então $2 \,|\, (4n^3 - n)$. Assim sendo, como $2 \,|\, 2$, tem-se por linearidade (Lema 1.1 Propriedade (i) do Texto sobre Divisibilidade),

$$2 \,|\, (2(2n^3) - (4n^3 - n)) \implies 2 \,|\, n,$$

o que prova que $n$ é par.

**7.3.** (**Exame**: 1.50 valores)

De acordo com a alínea 7.1, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe um $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $4n^3 - n = 3m$.

Por outro lado, pela alínea 7.2, 2 é um divisor de $3m = 4n^3 - n$ se, e só se, $n$ é par.

[2]Pergunta 5.1 do P-fólio.
[3]Pergunta 5.2 do P-fólio.

Assim, para $n$ par, tem-se que $2 \mid (3m)$ o que implica, por $\mathrm{mdc}(2,3) = 1$ e pela Proposição 1.9 do Texto sobre Divisibilidade, que $2 \mid m$. Assim, para todo o número par $n$ tem-se que $4n^3 - n = 6k$ para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o que é equivalente a

$$4n^3 \equiv n \pmod 6.$$

**8.** (**Exame**: 1.50 valores; **P-fólio**[4]: 1.0 valor)

Dividindo 273 por 111 tem-se $273 = 2 \cdot 111 + 51$, pelo que

$$\mathrm{mdc}(273, 111) = \mathrm{mdc}(111, 51).$$

De modo análogo, dividindo 111 por 51 tem-se $111 = 2 \cdot 51 + 9$, pelo que

$$\mathrm{mdc}(111, 51) = \mathrm{mdc}(51, 9).$$

Repetindo novamente este raciocínio obtém-se

$$\mathrm{mdc}(51, 9) = \mathrm{mdc}(9, 6),$$

em que pela Questão 4.1 dos Exercícios sobre Divisibilidade,

$$\mathrm{mdc}(9, 6) = 3 \cdot \mathrm{mdc}(3, 2) = 3.$$

**9.** (**Exame**: 3.50 valores; **P-fólio**[5]: 3.0 valores)

**9.1.** (**Exame**: 1.70 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)

A relação de recorrência do enunciado é equivalente a

$$a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

e, portanto, o seu polinómio característico é igual a

$$p(t) = t^2 + 4t + 3.$$

Sendo as raízes de $p$ iguais a $-3$ e a $-1$, tem-se então que cada termo $a_n$ da solução geral é igual a

$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta(-3)^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad -\alpha - 3\beta = a_1 = 2,$$

ou seja, para $\alpha = -\beta = 1$.

**9.2.** (**Exame**: 1.80 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)

Atendendo ao Exercício 2.1.1 da Actividade Formativa 2,

$$\underbrace{(-1) - (-3)}_{=2} \mid \underbrace{(-1)^n - (-3)^n}_{=a_n \in \mathbb{Z}},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[4]Pergunta 6 do P-fólio.
[5]Grupo 7 do P-fólio.