**UNIDADE CURRICULAR:** ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

**CÓDIGO:** 21037

**DOCENTE:** Catarina Nunes
**TUTORAS:** Ana Leitão Ferreira e Helena Grilo

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO**

**1.**

$S$ é um espaço equiprovável de 36 pontos/eventos, representando os pontos de cada dado. Por exemplo (1,1), quer dizer que em ambos os dados saiu 1.

1.1 - 0.5 valores

Calculando a função de probabilidade de $X$:
(1) Se saiu (1,1) , o valor máximo é 1 $(X = 1)$ e $f_X(1) = P(X = 1) = 1/36$
(2) Se sair (1,2); (2,2) ou (2,1), o valor máximo é 2 $(X = 2)$ e $f_X(2) = P(X = 2) = 3/36$
(3) Se sair (1,3); (2,3); (3,3); (3,2) ou (3,1), o valor máximo é 3 $(X = 3)$ e $f_x(3) = P(X = 3) = 5/36$
De forma semelhante $f_X(4) = P(X = 4) = 7/36$; $f_X(5) = P(X = 5) = 9/36$ e $f_X(6) = P(X = 6) = 11/36$

| $x_i$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_X(x_i)$ | $1/36$ | $3/36$ | $5/36$ | $7/36$ | $9/36$ | $11/36$ |

e $f_X(x) = 0, \ \ \forall\, x \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
*(50% cotação para a função de probabilidade de $X$ (formulação e resultado), considerando 5% para cada valor justificado)*
Calculando a função de probabilidade de $Y$:
(1) Se saiu (1,1) , a soma é 2 $(Y = 2)$ e $f_Y(2) = P(Y = 2) = 1/36$
(2) Se sair (1,2) ou (2,1), a soma é 3 $(Y = 3)$ e $f_Y(3) = P(Y = 3) = 2/36$

(3) Se sair (1,3); (2,2) ou (3,1) a soma é 4 $(Y = 4)$ e $f_Y(4) = P(Y = 4) = 3/36$

De forma semelhante:

$f_Y(5) = P(Y = 5) = 4/36$; $f_Y(6) = P(Y = 6) = 5/36$; $f_Y(7) = P(Y = 7) = 6/36 \ldots f_Y(12) = P(Y = 12) = 1/36$

| $y_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_Y(y_i)$ | $1/36$ | $2/36$ | $3/36$ | $4/36$ | $5/36$ | $6/36$ | $5/36$ | $4/36$ |

| $y_i$ | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| $f_Y(y_i)$ | $3/36$ | $2/36$ | $1/36$ |

e $f_Y(y) = 0, \ \ \forall\, y \neq \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

*(50% cotação para a função de probabilidade de $Y$ (formulação e resultado), considerando 3% para cada valor justificado)*

1.2 - 0.3 valores

$$E(X) = \sum x_i f_X(x_i) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + \cdots + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{161}{36}$$

*(40% cotação para a correta formulação e 10% pelo resultado final quando justificado)*

$$E(Y) = \sum y_i f_Y(y_i) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + \cdots + 12\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{252}{36} = 7$$

*(40% cotação para a correta formulação e 10% pelo resultado final quando justificado)*

1.3 - 0.4 valores

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f_X(x_i) = 1^1\left(\frac{1}{36}\right) + 2^2\left(\frac{3}{36}\right) + \cdots + 6^2\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{791}{36}$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{2555}{1296}} \simeq 1,40408355067779$$

*(20% cotação para a correta formulação e 10% pelo resultado final quando justificado)*

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 f_Y(y_i) = 2^2\left(\frac{1}{36}\right)+3^2\left(\frac{2}{36}\right)+\cdots+12^2\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{1974}{36}$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$VAR(Y) = E(Y^2)-E^2(Y) = \frac{1974}{36}-(7)^2 = \frac{35}{6} \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\frac{35}{6}} \simeq 2,41522945769824$$

*(20% cotação para a correta formulação e 10% pelo resultado final quando justificado)*

**2.**

Seja: $H$ o evento de sair face par no dado (dado tem 3 faces pares e 3 ímpares); $E_k$ o evento de sair uma bola branca na k-ésima extracção com $k = 1, 2$.

$$P(H) = P(\bar{H}) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_1|H) = P(E_2|H) = P(E_1|\bar{H}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(E_2|\bar{H}) = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{0}}{\binom{12}{2}}$$

$X$ - v.a. número de bolas brancas extraídas do saco $x \in \{0, 1, 2\}$
Distribuição de $X$ é dada por:

$$P(X = i|H) = P(X = i|H)P(H) + P(X = i|\bar{H})P(\bar{H}), \qquad i = 0, 1, 2$$

2.1 - 0.2 valores

Qual a distribuição de $X$ se sair um número par no dado? Resposta **A)**
$X$ segue uma distribuição Binomial $X \sim Bin(2, 2/3)$

$$P(X = i|H) = \binom{2}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{2-i}, \qquad i = 0, 1, 2$$

2.2 - 0.2 valores

Qual o valor esperado de $X$ se sair um número par no dado? Resposta **A)**

Distribuição Binomial

$$E[X] = np = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

2.3 - 0.2 valores

Qual a distribuição de $X$ se sair um número ímpar no dado? Resposta **A)**

$X$ segue uma distribuição Hipergeométrica $X \sim H(12, 8, 2)$

$$P(X = i|\bar{H}) = \frac{\binom{8}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{12}{2}}, \quad i = 0, 1, 2$$

**3.**

3.1 - 0.2 valores

Sendo $Y = X^2$, a variável aleatória $Y$ apenas tem valores 4 e 1. Seja $g(y)$ a função de probabilidade de $Y$, temos:

$$g(4) = P(Y = 4) = P(X = -2 \cup X = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De modo semelhante temos, $g(1) = \frac{1}{2}$.

| $y$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|
| $g(y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

e $g(y) = 0, \;\; \forall\, y \neq \{1, 4\}$

*(100% cotação para a função de probabilidade, considerando 30% para cada valor justificado)*

3.2 - 0.3 valores

Seja $h(x,y)$ a função de probabilidade conjunta de $(X,Y)$. Se $X = -2$, então $Y = 4$, portanto $h(-2,1) = 0$ e $h(-2,4) = f(-2) = \frac{1}{4}$. Seguindo o mesmo raciocínio temos para $h(x,y)$:

| $x \diagdown y$ | 1 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ |
| $1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ |
| $2$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\sum$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

e $h(x,y) = 0, \;\; \forall\, x \neq \{-2,-1,1,2\} \; e \; y \neq \{1,4\}$

*(100% cotação para a função de probabilidade, considerando 10% para cada valor justificado)*

3.3 - 0.4 valores

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = -2\left(\frac{1}{4}\right) - 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_i y_i g(y_i) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j h(x_i, y_j) = -8\left(\frac{1}{4}\right) - 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 8\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$\sigma_{XY} = COV(X,Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y = 0 - 0\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

$$\sigma_{XY} = 0 \Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$$

*(15% cotação para a correta formulação e 5% pelo resultado final quando justificado)*

3.4 - 0.4 valores

$X$ e $Y$ são independendes sse: $f(x)g(y) = h(x,y)$.
*(50% cotação para a correta formulação)*
Pela função de probabilidade conjunta temos o contraexemplo:

$$h(-2,1) = P(X=-2, Y=1) = 0$$

$$\not\Leftrightarrow$$

$$f(-2)g(1) = P(X=-2)P(Y=1) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Portanto $X$ e $Y$ não são independentes.
*(25% cotação para a correta formulação e 25% pelo resultado final quando justificado)*

**4.**

4.1 - 0.5 valores

Os 10 patos são uma pequena fracção do número de patos inscritos no concurso $(n \leqq 0,05N)$, estamos perante uma experiência multinomial onde $n = 10$, $A_1$= "pato com chapéu", $A_2$= "pato com flor"e $A_3$= "pato sem adereços".
Seja $X_1$ - v.a. número de patos com chapéu; $X_2$ - v.a. número de patos com flor e $X_3$ - v.a. número de patos sem adereços; $p_1 = 0,40$, $p_2 = 0,35$ e $p_3 = 0,25$. Com a seguinte função de probabilidade multinomial:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}p_3^{x_3}$$

*(30% cotação para definição das v.a., 20% para a definição da distribuição)*
Pretende-se:

$$f(2,2,6) = P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 6)$$

*(30% cotação)*

$$= \frac{10!}{2!2!6!}(0,40)^2(0,35)^2(0,25)^6 = \left(\frac{3628800}{2880}\right)(0,16)(0,1225)(0,000244140625)$$

$$= 0,006029296875 = 6,029296875 \times 10^{-3}$$

*(20% cotação) pelo resultado quando justificado*

4.2 - 0.2 valores

Pretende-se:

$$f(5,5,0) = P(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 0)$$

$$= \frac{10!}{5!5!0!}(0,40)^5(0,35)^5(0,25)^0 = \left(\frac{3628800}{14400}\right)(0,01024)(0,0052521875)(1)$$

$$= 0,0135531648 = 1,35531648 \times 10^{-2}$$

Resposta: **A**

*(100% cotação)*

4.3 - 0.2 valores

Pretende-se:

$$E(X_3) = np_3 = 10 * 0,25 = 2,5$$

Resposta: **B**

*(100% cotação)*

FIM