Elementos de Probabilidade e Estatística | 21037

Proposta de resolução e critérios de correção do E-fólio B. Em determinadas questões é possível existir mais do que uma versão de resolução. Apresentamos apenas uma versão. Outras versões e interpretações, desde que corretas, foram corrigidas com os mesmos critérios da presente resolução.

Questão 1

Considere a seguinte função real de variável real, onde a e b são constantes positivas:

$$f(x) = \begin{cases} bx/a & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{outros } x. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b de forma a que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X com valor esperado igual a $1/3$.

Resolução:

(0.10 valores) $$f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(0.15 valores) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^a \frac{bx}{a}\, dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{ab}{2} = 1.$$

(0.15 valores) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^a \frac{bx^2}{a}\, dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2 b}{3} = 1/3.$$

(0.10 valores) $$\begin{cases} ab/2 = 1 \\ a^2b/3 = 1/3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 4. \end{cases}$$

Questão 2
Determine a média e a variância de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[a,\ b]$, com $b > a$ contantes reais. Nota: nesta questão não se pretende que apresente simplesmente as expressões da média e da variância, mas a dedução das mesmas.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{(0.10 valores)}\quad X &\sim X \sim \mathcal{U}(a,b). \\
\text{(0.10 valores)}\quad f(x) &= \frac{1}{b-a}. \\
\text{(0.15 valores)}\quad E[X] &= \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}. \\
\text{(0.15 valores)}\quad \mathrm{Var}\,(X) &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Questão 3
Sejam $X \sim N(0,\ \sigma^2)$ e $Y = |X|$, onde $\sigma > 0$. Obtenha a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y.

Resolução:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(|X| \leq y) \\
&= P(-y \leq X \leq y), \quad y > 0 \\
&= P\left(-\frac{y-0}{\sigma} \leq \frac{X-0}{\sigma} \leq \frac{y-0}{\sigma}\right) \\
&= P\left(-\frac{y}{\sigma} \leq Z \leq \frac{y}{\sigma}\right), \quad Z \sim N(0,1) \\
&= \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - 1. \quad \text{(0.50 valores)}
\end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade de Y é obtida derivando $F_Y(y)$ em ordem a y, isto é,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\},\ y > 0. \quad \text{(0.50 valores)}$$

Questão 4
Admite-se que o montante de vendas diário de uma empresa é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10 centenas de euros e desvio padrão 4 centenas de euros. Determine a probabilidade de, em vinte dias, pelo menos quatro dias resultarem em vendas superiores a 15 centenas de euros.

Resolução:

(0.10 valores) Y = "montante de vendas diário"; $Y \sim N(10, 4^2)$.

(0.10 valores) X = "nº de dias, entre os 20, em que as vendas excedem 15 centenas de euros".

(0.30 valores) $X \sim Bi(20, \theta)$, com $\theta = P(Y > 15) = 1 - \Phi\left(\frac{15-10}{4}\right) = 0.1056.$

(0.50 valores) $P(X \geq 4) = 1 - F_X(3) = 1 - 0.8463 = 0.1537.$

Questão 5
Um vendedor afirma que os lotes de lenha para lareira que ele vende são constituídos por troncos cujos peso (em kg) é bem modelado por uma variável aleatória cujo valor médio é igual a 3 kg e o desvio padrão é igual a 0.25 kg. O José comprou 500 kg de lenha mas ficou com a sensação de que tinha sido enganado no peso. Contou os troncos um a um e chegou à conclusão de que o vendedor lhe entregou 170 troncos. Qual a probabilidade de o José ter sido enganado?

Resolução:
(0.10 valores) Seja X_i = "peso do tronco i", $i = 1, \ldots, 170$. Vamos supor que as variáveis aleatórias $X_i,\ i = 1, \ldots, 170$, são i.i.d.

(0.10 valores) Pretende-se: $P\left(\sum_{i=1}^{170} X_i < 500\right)$.

(0.30 valores) Pelo Teorema do Limite Central: $\dfrac{\sum_{i=1}^{170} X_i - 170 \times 3}{\sqrt{170 \times 0.25^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$

(0.50 valores) Logo, $P\left(\sum_{i=1}^{170} X_i < 500\right) \approx \Phi\left(\frac{500 - 170 \times 3}{\sqrt{170 \times 0.25^2}}\right) \approx 0.001.$

FIM