U.C. 21175

Análise Infinitesimal - proposta de resolução

19 de fevereiro de 2020

1. Calcule os seguintes limites:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x\left(x + \sin^2(2x)\right)}{2x^3+1}$$

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x\left(x + \sin^2(2x)\right)}{2x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x^2 - x\sin^2(2x)}{2x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x\sin^2(2x)}{2x^3+1}.$$

Dividindo o numerador e denominador por x^3, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2 - x\sin^2(2x)}{x^3}}{\frac{2x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{\sin^2(2x)}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^3}}.$$

Agora temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

e também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Por outro lado, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2(2x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2(2x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} = 0.$$

Então temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x\left(x + \sin^2(2x)\right)}{2x^3+1} = \frac{0-0}{2+0} = 0.$$

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\cos(\pi x)}{x^2 - 4x + 3}.$$

Usando a regra de Ruffini para factorizar o polinómio do numerador, $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ temos

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & 3 & -1 \\
1 & & 1 & -2 & 1 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0
\end{array}
$$

pelo que concluímos que

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x^2 - 2x + 1).$$

Aplicando a regra de Ruffini ao polinómio do denominador, $x^2 - 4x + 3$, temos

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -4 & 3 \\
1 & & 1 & -3 \\
\hline
 & 1 & -3 & 0
\end{array}
$$

pelo que

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\cos(\pi x)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 1)\cos(\pi x)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)\cos(\pi x)}{x - 3} = \frac{(1^2 - 2 \times 1 + 1) \times \cos(\pi)}{-2} = 0.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

(a) Determine as assíntotas de f.

A função f é uma função racional, pelo que é contínua no seu domínio. Assim, as eventuais assímptotas verticais são $x = -1$ ou $x = 1$.

Calculamos

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Assim, $x = 1$ e $x = -1$ são assímptotas verticais do gráfico de f.

Para averiguarmos a existência de assímptotas oblíquas, calculamos

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0.$$

Finalmente calculamos

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2 - 1}{x}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}}.$$

Como
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$
temos
$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0.$$
Assim, $y=0$ é uma assíptota horizontal do gráfico de f quando $x\to+\infty$. Da mesma forma, quando $x\to-\infty$, temos
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$$
e
$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2-1}{x}}=$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}.$$
Novamente, como
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$
concluímos que
$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0$$
e $y=0$ é uma assíptota horizontal do gráfico de f quando $x\to-\infty$.

(b) Determine os intervalos de monotonia e extremos locais de f. A função f é uma função racional, pelo que é infinitamente diferenciável no seu domínio. Para estudar a monotonia e eventual existência de extremos locais de f, calculamos a derivada de f. Temos
$$f'(x)=\frac{(x)'(x^2-1)-(x^2-1)'x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}.$$
Notamos que o denominador $(x^2-1)^2$ é sempre positivo, desde que $x\neq-1$ e $x\neq 1$. Da mesma forma, no numerador temos
$$-x^2-1=-(x^2+1)$$
e como $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, concluímos que o termo no numerador é negativo, $\forall x\in\mathbb{R}$. Assim $f'(x)<0,\ \forall x\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e f é decrescente em $]-\infty,-1[$, em $]-1,1[$ e em $]1,+\infty[$ e concluímos que f não tem extremos locais.

(c) Determine as concavidades e inflexões de f.
Na alínea anterior concluímos que f é infinitamente diferenciável no seu domínio. Para determinar as concavidades e inflexões de f, deveremos estudar o sinal da segunda derivada de f. Temos
$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(-x^2-1)'(x^2-1)^2-\left((x^2-1)^2\right)'(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$
$$\frac{-2x(x^2-1)^2-(2(x^2-1)2x)(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}\underbrace{=}_{x^2-1\neq0,\text{ se }x\in D_f}\frac{-2x(x^2-1)-(2\times 2x)(-x^2-1)}{(x^2-1)^3}=$$

$$\frac{2x\left(-x^2+1+2x^2+2\right)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(x^2-1)^3}.$$

Temos que $f''(0) = 0$ e o termo $2x$ é negativo se $x < 0$ e positivo se $x > 0$ e

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 > 0.$$

O sinal do termo $(x^2-1)^3$ é o mesmo do termo x^2-1, ou seja, é positivo para $x < 1$ e $x > 1$ e negativo se $-1 < x < 1$. Podemos construir uma tabela de sinal para estudar o sinal da segunda derivada de f,

	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0{,}1[$	$]1,+\infty[$
$2x$	-	-	+	+
x^2+3	+	+	+	+
$(x^2-1)^3$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	+	-	+

.

Assim, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e $]0,1[$ e voltada para cima em $]-1,0[$ e $]1,+\infty[$ e $x=0$ é um ponto de inflexão.

(d) Esboce o gráfico de f.

Tendo em conta a informação recolhida nas alíneas anteriores, um esboço do gráfico de f poderá ser o seguinte

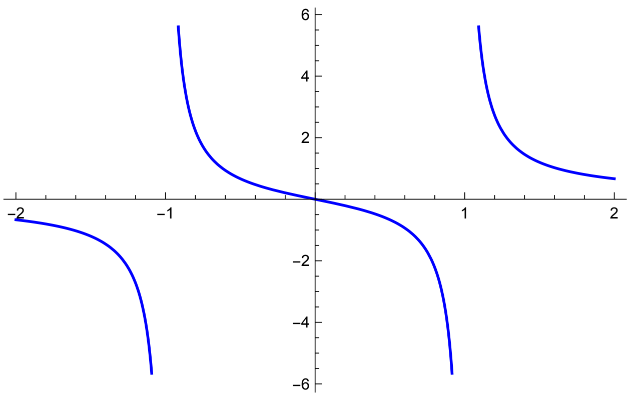

Figura 1: Gráfico de f.

(e) Calcule o polinómio de Taylor de ordem 2 de $f(x)$ no ponto $x=0$. De acordo com a alínea b), a função f é infinitamente diferenciável no seu domínio. Assim, o polinómio de Taylor de ordem 2 de $f(x)$ no ponto $x=0$ é

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = 0 - x + 0 = -x.$$

3. Determine a família de primitivas das seguintes funções:

(a) $\cos(5x) + e^{2x-7} + x^4 - 3$.

Temos

$$\int \left(\cos(5x) + e^{2x-7} + x^4 - 3\right) dx = \int \cos(5x)dx + \int e^{2x-7}dx + \int x^4 dx - \int 3dx =$$

$$\frac{\sin(5x)}{5} + \frac{e^{2x-7}}{2} + \frac{x^5}{5} - 3x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) $\sin(4x)\,(x-2)$.

Temos

$$\int \sin(4x)\,(x-2)\,dx = \int \sin(4x)xdx - \int 2\sin(4x)dx = \int \sin(4x)xdx + \frac{\cos(4x)}{2}.$$

Calculamos agora $\displaystyle\int \sin(4x)xdx$ por partes, tomando

$u'(x) = \sin(4x) \Rightarrow u(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}$ e $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$. Então,

$$\int \underbrace{\sin(4x)}_{u'}\underbrace{x}_{v}\,dx = \underbrace{-\frac{\cos(4x)}{4}}_{u}\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{-\frac{\cos(4x)}{4}}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,dx =$$

$$-\frac{\cos(4x)x}{4} + \frac{\sin(4x)}{16}$$

Então concluímos que

$$\int \sin(4x)\,(x-2)\,dx = -\frac{\cos(4x)x}{4} + \frac{\sin(4x)}{16} + \frac{\cos(4x)}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

4. Calcule
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 - 2 + e^{4x} - \sin(4x)\right) dx.$$

Temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 - 2 + e^{4x} - \sin(4x)\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{e^{4x}}{4} + \frac{\cos(4x)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\left(\frac{\pi^3}{3} - 2\pi + \frac{e^{4\pi}}{4} + \frac{\cos(4\pi)}{4}\right) - \left(\frac{(-\pi)^3}{3} - 2\times(-\pi) + \frac{e^{4\times(-\pi)}}{4} + \frac{\cos(4\times(-\pi))}{4}\right) =$$

$$\frac{2\pi^3}{3} - 4\pi + \frac{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}{4}.$$

FIM