ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve resolução do exame de 29 de janeiro

I. Questões de escolha múltipla:

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Exame	$b)$	$a)$	$a)[iv)]$	$d)$
P-fólio	$b)$	$a)$	$d)$	–

Nota: Havia uma gralha no enunciado da última questão, onde estava $F\cap G$ devia estar $H\cap G$.

II. a) A afirmação é verdadeira.

Se $A+A^2+A^3$ é invertível então necessariamente $\det(A+A^2+A^3)\neq 0$.

Como $A+A^2+A^3 = A(I_n+A+A^2))$ tem-se

$$\det(A+A^2+A^3) = \det A(I_n+A+A^2) = \det A \det(I_n+A+A^2)\neq 0,$$

e portanto $\det A\neq 0$ e $\det(I_n+A+A^2)\neq 0$, o que mostra em particular que A é invertível

b) A afirmação é verdadeira.

Se $A\in\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem os valores próprios 1 e -1 então é uma matriz diagonalizável, e em particular existe uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D tais que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \iff A = S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}S^{-1} = SDS^{-1}$$

e portanto, reparando que $D^2 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)^2 = I_2$,

$$A^2 = \left(SDS^{-1}\right)^2 = SDS^{-1}SDS^{-1} = SDI_2DS^{-1} = SD^2S^{-1} = SI_2S^{-1} = SS^{-1} = I_2.$$

Nota: Se fosse

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -D,$$

a conclusão seria a mesma pois $(-D)^2 = I_2$.

III. Condensando a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

obtem-se a solução única $(x, y, z, w) = (-2, -1, 0, 1)$.

IV. Consideramos como base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ a sequência $\mathscr{B} = (x^2, x, 1)$.

Usando a base $\mathscr{B} = (x^2, x, 1)$, tem-se

$$T\left(x^2\right) = 2x, \quad T(x) = 1 \quad \text{e} \quad T(1) = 0.$$

A matriz A que representa T nas bases indicadas, é a matriz que tem por *colunas* as imagens dos vetores da base do espaço de partida, ou seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

O núcleo de T corresponde aos polinómios $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tais $T(p) = 0$, ou seja $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = 0 \iff a = b = 0$, o que corresponde aos polinómios constantes, que têm por base o polinómio $p(x) = 1$, e portanto o núcleo tem dimensão 1.

Na base $\mathscr{B}$ corresponde a $(0, 0, 1)$.

O espaço imagem de T pode ser obtido através das colunas de A ou reparando que como $T(ax^2+bx+c) = 2ax+b$, então a imagem é gerada por x e por 1 e tem portanto dimensão 2.

Na base $\mathscr{B}$ corresponde a $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

O Teorema da Dimensão neste caso traduz-se por

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \operatorname{Nuc} T + \dim \operatorname{Im} T$$

ou seja $3 = 1 + 2$.

Como a matriz A é triangular os valores próprios de A são os elementos da diagonal, neste caso apenas 0, que é um valor próprio com multiplicidade algébrica 3.

O espaço próprio associado ao valor próprio 0 corresponde ao núcleo de T, ou seja é gerado pelo vetor próprio $(0, 0, 1)$, e portanto a multiplicidade geométrica do valor próprio 0 é 1.

A matriz A não é diagonalizável pois A é uma matriz 3×3 e a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios é $1 \neq 3$.

V. $X=0$ é uma solução óbvia de $BX=0$.

Se $BX=0$ então aplicando $A^\top$ de ambos os lados tem-se

$$\begin{aligned} BX=0 &\implies A^\top BX = A^\top 0 = 0 \\ &\implies \left(A^\top B\right)^{-1}(A^\top BX) = \left(A^\top B\right)^{-1} 0 = 0 \\ &\implies \left(A^\top B\right)^{-1}(A^\top B)X = 0 \\ &\implies I_2 X = 0 \\ &\implies X = 0. \end{aligned}$$

Nota: Uma vez que as matrizes A e B não são matrizes quadradas não fazia sentido falar em $\det A$ ou em A^{-1}.

FIM