



ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre dia 17 de julho de 2020 das 15h00 às 18h00 de Portugal Continental

Data de Limite de Entrega

17 de julho de 2020, até às 18h00 de Portugal Continental

Conteúdos

Álgebra Linear

Competências

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

Trabalho a desenvolver

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste E-fólio Global é de 12 valores.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio Global na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 15 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioG.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio Global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla. (3 valores)

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

Questão 1

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Então:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A é invertível.
- b) $\det A = x$.
- c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(2A) = 2 \det A$.
- d) A é invertível se e só se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Questão 2

Considere $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a, b, c + d)$
e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y, z) = (z, x, y)$. Então:

- a) $\text{Nuc } g = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
- b) $(g \circ f) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (1, 1, 0)$.
- c) $\text{Nuc } f = 0$.
- d) $\text{Nuc } f \neq \text{Nuc } (g \circ f)$.

Questão 3

Sejam F e G subespaços lineares de \mathbb{R}^3 definidos por $F = \langle (1, 2, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 0) \rangle$
e $G = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$.

Então:

- a) $\dim(F + G) = 4$.
- b) $\dim(F \cap G) = 1$.
- c) $\dim(F \cup G) = 2$.
- d) $\dim F = 3$.

Questões de desenvolvimento

Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (1 valor)

Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

A sequência $\{1 + t + t^2, 1 + t, 1\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

III. (3 valores)

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Determine os valores próprios da matriz A .
- b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

- c) Mostre que existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. (3 valores)

Considere a aplicação linear $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} w & y \\ z & -x \end{bmatrix}.$$

- a) Determine o núcleo de T e a dimensão da imagem de T .
- b) Considerando a base canónica em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ determine a matriz que representa T .
- c) Determine se T é invertível, e em caso afirmativo determine a matriz que representa a inversa de T .

V. (2 valores)

- a) Seja $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $S = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : M^T X = X M^T\}$.
Mostre justificadamente que S é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- b) Considere agora $n = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine uma base para $S = \{X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : M^T X = X M^T\}$.

FIM