Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Dados três dados, um preto, um vermelho e um amarelo, quantas são as maneiras de sairem **exactamente** dois números iguais?

☐ a) 540 ☐ c) 90

☐ b) 96 ☐ d) 30

2. O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(4x+8)^8$ é igual a:

☐ a) $\binom{8}{6}$ ☐ c) $4^8\binom{8}{6}$

☐ b) $4\binom{8}{6}$ ☐ d) $4^6 8^2\binom{8}{6}$

3. Dados dois números inteiros m e n positivos e uma aplicação injectiva

$$f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n,$$

à partida pode dizer-se que...

☐ a) $m \leq n$ ☐ c) $m \geq n$

☐ b) $m = n$ ☐ d) $m \neq n$

4. Relativamente aos números 72684 e 7284 podemos afirmar:

☐ a) Ambos são divisíveis por 7

☐ b) 72684 é divisível por 7, mas 7284 não é

☐ c) 7284 é divisível por 7, mas 72684 não é

☐ d) Nenhum deles é divisível por 7

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. Entre todos os números naturais entre 1 e 600, inclusivé, determine:

2,5 **5.1.** Quantos são divisíveis por 3.

5.2. Quantos são divisíveis por 3 ou por 5.

6. Mostre que:

6.1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

3,5 **6.2.** n^2 é um divisor de

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}^2.$$

7. Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, suponha que existem dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1.$$

3,5 **7.1.** Mostre que a e b são primos entre si.

7.2. Determine $\mathrm{mdc}(|x|, |y|)$.

1,5 **8.** Calcule $\mathrm{mdc}(197, 34)$ e $\mathrm{mmc}(197, 34)$.

9. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 4b_{n-1} - 2a_{n-1} \\ b_n = 7b_{n-1} - 5a_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 1,$$

e pelas condições iniciais $a_0 = 4$, $b_0 = 3$.

9.1. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que

$$a_n - b_n = 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5

9.2. Prove que

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

e determine o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$.

9.3. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$.