Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre dia 23 de Junho de 2021, das 15:00 às 17:00

Enunciado

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1 (2 val.) Uma empresa produz 2 tipos de placa de isolamento. Na produção são usadas duas máquinas, A e B, cada uma trabalhando no máximo 14h e 16h por semana, respectivamente.

Para produzir 100 m^2 do primeiro tipo de isolamento são necessárias 3h de trabalho a máquina A e 6h na máquina B. Para a mesma quantidade de isolamento de tipo 2 são necessárias 4h de trabalho na máquina A e 2h na máquina B.

A empresa lucra 4000 €pela venda de 100 m^2 do primeiro tipo de isolamento e 3000 €por cada 100 m^2 de isolamento do segundo tipo.

Formalize o problema apresentado de modo a maximizar o lucro, justificando cuidadosamente todas as decisões.

Resolução:

A empresa tem de decidir quantas placas fabricar de tipo 1 e quantas de tipo 2. Assim, as variáveis de decisão são o número de placas a fabricar de cada tipo:

X: *número de placas de isolamento de tipo 1 a fabricar. Assumimos que cada placa tem uma área de* $100m^2$

Y: *número de placas de isolamento de tipo 2 a fabricar. Assumimos que cada placa tem uma área de* $100m^2$

Note-se que X *e* Y *assumem valores inteiros positivos.*

O objectivo é maximizar o lucro. Assim, a função objectivo é o lucro da venda dos dois tipos de placas:

$$F(X,Y) = 4X + 3Y$$

em milhares de euros.

A empresa lucra 4000 euros pela venda de cada placa de $100m^2$ de tipo 1 e 3000 euros por cada placa de $100m^2$ de tipo 2. Logo o lucro da venda das X placas de tipo 1 é $4X$ milhares de euros, enquanto que a venda das Y placas de tipo 2 dá um lucro de $3Y$ milhares de euros.
A empresa tem apenas duas restrições, ambas relacionadas com as horas de funcionamento das máquinas que produzem as placas. Para a produção das placas são necessárias duas máquinas, A e B. A máquina A trabalha, no máximo, 14h por semana e a B, 16h por semana. Cada placa de tipo 1 precisa de 3h na máquina A e 6 na máquina B. Cada placa de tipo 2 precisa de 4h na máquina A e 2 na máquina B. Assim, para produzir X placas de tipo 1 e Y placas de tipo 2 são necessárias $3X + 4Y$ horas da máquina A e $6X + 2Y$ horas da máquina B, logo

$$3X + 4Y \leq 14 \qquad \textit{e} \qquad 6X + 2Y \leq 16.$$

Assim, o problema de programação linear é o seguinte.

$$\max F = 4X + 3Y$$
$$s.a. \begin{cases} 3X + 4Y \leq 14 \\ 6X + 2Y \leq 16 \\ X, Y \geq 0 \\ X, Y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 (4 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = X + 3Y$$

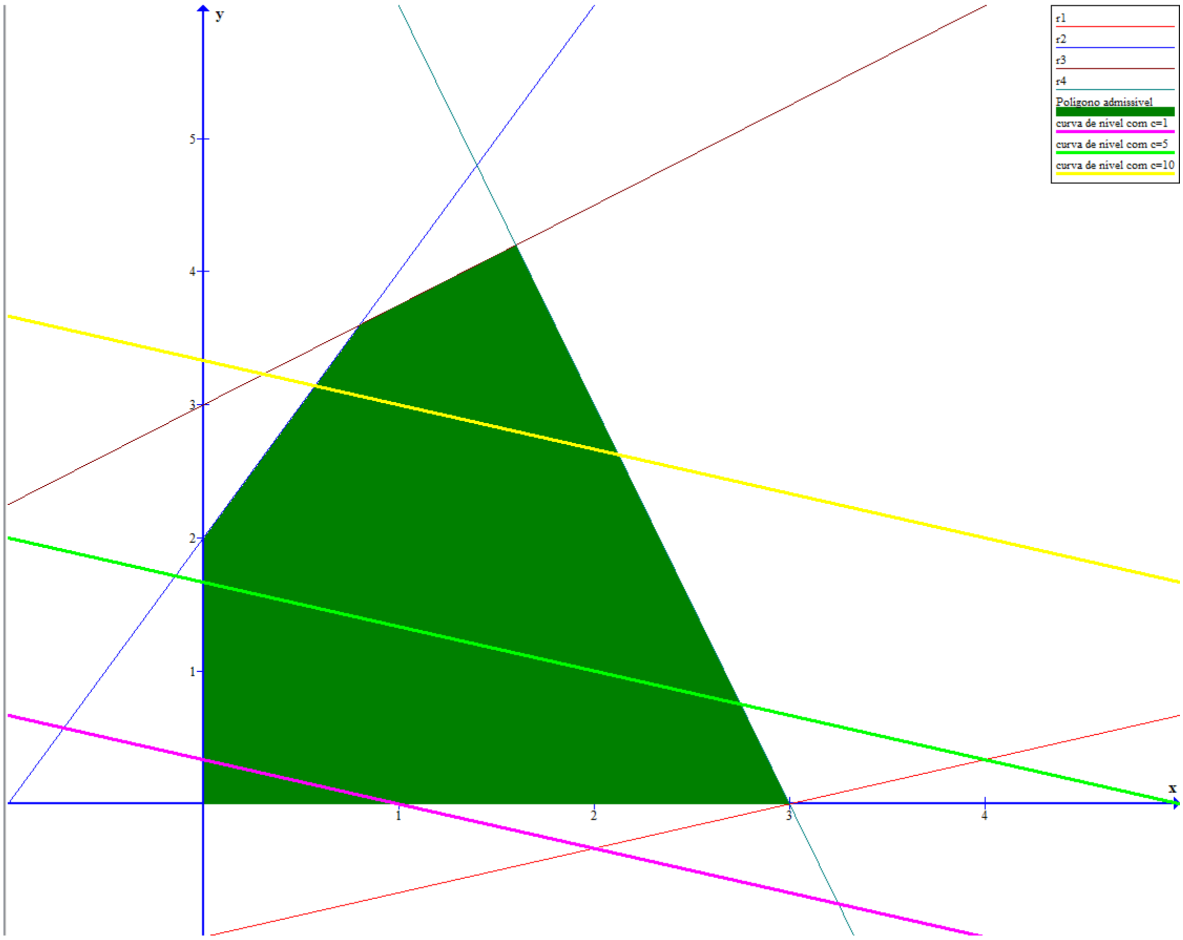
$$\text{sujeito a} \begin{cases} X - 3Y \leq 3 \\ -2X + Y \leq 2 \\ -3X + 4Y \leq 12 \\ 3X + Y \leq 9 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos (determinação de todas as restrições, intersecção das restrições, curvas de nível da função objectivo, sentido de crescimento da função objectivo, determinação de ponto(s) óptimo(s),...).

Resolução:
O primeiro passo para resolver o problema pelo método gráfico é desenhar o polígono admissível, tendo em conta as restrições. Tendo em

conta que $X, Y \geq 0$, o polígono admissível encontra-se no primeiro quadrante.

A recta correspondente à primeira restrição é $X - 3Y = 3 \Leftrightarrow Y = -\frac{1}{3}X - 1$, ou seja é a recta de declive $-\frac{1}{3}$ que intersecta o eixo vertical no ponto $(0, -1)$. Como a primeira restrição é equivalente a $Y \geq -\frac{1}{3}X - 1$, estamos interessados no semiplano acima da recta.
A recta correspondente à segunda restrição é dada pela equação $-2X + Y = 2 \Leftrightarrow Y = 2X + 2$, ou seja, é a recta de declive 2 que cruza o eixo vertical no ponto $(0, 2)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \leq 2X + 2$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta.
A recta correspondente à terceira restrição é dada pela equação $-3X + 4Y = 12 \Leftrightarrow Y = \frac{3}{4}X + 3$, ou seja, é a recta de declive $\frac{3}{4}$ que cruza o eixo vertical no ponto $(0, 3)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \leq \frac{3}{4}X + 3$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta.
A recta correspondente à quarta restrição é dada pela equação $3X + Y = 9 \Leftrightarrow Y = -3X + 9$, ou seja, é a recta de declive -3 que cruza o eixo vertical no ponto $(0, 9)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \leq -3X + 9$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta.
Assim, o polígono admissível é a região do primeiro quadrante que resulta da intersecção do semiplano acima da recta $Y = -\frac{1}{3}X - 1$ com o semiplano abaixo da recta $-2X + Y = 2$, com o semiplano abaixo da recta $-3X + 4Y = 12$ e com o semiplano abaixo da recta $3X + Y = 9$.



Para descobrir o ponto(s) do polígono admissível onde F assume o valor máximo, temos de perceber quais são as curvas de nível de F e em que sentido cresce.

Curvas de nível de F (com $c \in \mathbb{R}$ constante):

$$F(X,Y) = c \Leftrightarrow X + 3Y = c \Leftrightarrow Y = -\frac{X}{3} + \frac{c}{3}$$

Assim, as rectas de nível da função F são as rectas de declive $-1/3$. Pela expressão da função F, à medida que o valor de Y aumenta, sai que o valor de F aumenta. Assim, no gráfico seguinte, representa-se a violeta, verde e amarelo três rectas de nível de F, assim como o sentido de crescimento.

Assim, pelo sentido de crescimento da função F, percebe-se facilmente que o ponto do polígono em que a função F assume o valor mais elevado é o ponto na intersecção das rectas correspondentes às restrições 3 e 4.

$$\left\{\begin{array}{l} -3X+4Y=12 \\ 3X+Y=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3X=4Y-12 \\ 4Y-12+Y=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3X=4Y-12 \\ 5Y=21 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=\dfrac{4Y-12}{3} \\ Y=\dfrac{21}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=\dfrac{8}{5} \\ Y=\dfrac{21}{5} \end{array}\right.$$

Assim, o ponto óptimo é o ponto $\left(\frac{8}{5}, \frac{21}{5}3\right)$, correspondente a $X^*=\frac{8}{5}$ e $Y^*=\frac{21}{5}$ e em que o valor máximo de F é $F^*=X^*+3Y^*=\frac{71}{5}$.

b) Utilize o método do simplex para resolver o problema. Justifique cuidadosamente todos os cálculos.
Argumente, justificando qual dos métodos (entre o método gráfico ou o método do simplex escolhido) usaria para resolver um problema de programação linear semelhante com mais 4 restrições .

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = X+2Y+0F_1+0F_2+0F_3+0F_4$$
$$\text{s.a.} \left\{\begin{array}{l} X-3Y+F_1=3 \\ -2X+Y+F_2=2 \\ -3X+4Y+F_3=12 \\ 3X+Y+F_4=9 \\ X,Y,F_1,F_2,F_3,F_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

Como o problema não tem desigualdades $\geq$, na forma standard, não é acrescentar variáveis artificiais. Assim, o problema vai ser resolvido pelo do simplex primal.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	F_3	F_4	TI	Δ_i
	F_1	1	-3	1	0	0	0	3	—
	F_2	-2	1	0	1	0	0	2	2 $\leftarrow$
	F_3	-3	4	0	0	1	0	12	3
	F_4	3	1	0	0	0	1	9	9
	F	-1	-3	0	0	0	0		
			$\uparrow$						
$l_1 + 3l_2$	F_1	-5	0	1	3	0	0	9	—
	Y	-2	1	0	1	0	0	2	—
$l_3 - 4l_2$	F_3	5	0	0	-4	1	0	4	$\frac{4}{5}$ $\leftarrow$
$l_4 - l_2$	F_4	5	0	0	-1	0	1	7	$\frac{7}{5}$
$l_5 + 3l_2$	F	-7	0	0	3	0	0	6	
		$\uparrow$							
$l_1 + l_3$	F_1	0	0	1	-1	1	0	13	—
$l_2 + \frac{2}{5}l_3$	Y	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	—
$\frac{1}{5}l_3$	X	1	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	—
$l_4 - l_3$	F_4	0	0	0	3	-1	1	3	1 $\leftarrow$
$l_5 + \frac{7}{5}l_3$	F	0	0	0	$-\frac{13}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{58}{5}$	
					$\uparrow$				
$l_1 + \frac{1}{4}l_4$	F_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	14	
$l_2 + \frac{1}{5}l_4$	Y	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{21}{5}$	
$l_3 + \frac{4}{15}l_4$	X	1	0	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{5}$	
$\frac{1}{3}l_4$	F_2	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	

Em cada passo do método, escolhe-se para entrar na base a variável que apresenta o valor negativo mais baixo na linha de F. Sai da base a variável que apresenta o valor Δ_i mais baixo.

Como na linha da função F já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de F, $F^* = \frac{71}{5}$, quando $X^* = \frac{8}{5}$, $Y^* = \frac{21}{5}$, $F_1^* = 4$ e $F_2^* = 1$.
Note-se que o valor na linha de F correspondente às variáveis de folga F_2 e F_3 (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução óptima é única.

Se tivéssemos de resolver um problema semelhante com mais 4 restrições, poderíamos optar por qualquer um dos métodos (gráfico ou simplex). No entanto o método do simplex é mais metódico e mais fácil de implementar computacionalmente, peloq ue seria a melhor opção. No método gráfico com muitas restrições, pode ficar difícil de perceber qual a região admissível e onde se encontra o ponto óptimo.

3 (5 val.) Uma clínica realiza um determinado tipo de exame que, pela sua especificidade, apenas é realizado por um único médico da clínica. A chegada dos utentes segue uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de chegada de 10 pessoas por hora. Os pacientes são atendidos de acordo com a disciplina FIFO e estão dispostos a esperar o necessário para serem atendidos. A estimativa do tempo gasto por exame seja exponencialmente distribuído, com um tempo médio de 4 minutos.

a) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado, justificando detalhadamente a caracterização.

Resolução:
Trata-se de um sistema $M/M/1$ (População=∞, Fila máxima=∞) porque tanto o processo de chegada de utentes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1 porque tem apenas um médico a a realizar o exame.
Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = \frac{1}{6}$ utentes por minuto (10 utentes por hora).
Duração do serviço com distribuição Exponencial com taxa de atendimento de $\mu = \frac{1}{4}$ utentes por minuto (4 minutos por exame).
População de chamadas ilimitada.
Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) Determine a probabilidade de se formar uma fila de espera.

Resolução:

Para termos fila de espera, tem de existir pelo menos 2 utentes na clínica, um a ser atendido e o outro em fila de espera. Assim,

$$P(utentes \geq 2) = 1 - P(utentes < 2) = 1 - (P_0 + P_1)$$

Sendo $\lambda = \frac{1}{6}$ e $\mu = \frac{1}{4}$, sai que a taxa de pressão é dada por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \quad \surd$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Assim,

$$P(utentes \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \sim 44,4\%$$

c) Determine o tamanho médio da fila de espera.

Resolução:

O tamanho médio na fila de espera é dado por

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \text{ utentes.}$$

d) Determine o tempo médio de espera.

Resolução:

O tempo médio de espera é dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = 8 \text{ minutos}$$

e) Qual a probabilidade de um utente estar menos de 12 min à espera para ser atendido?

Resolução:

Queremos calcular $P(W_q \leq 12)$:

$$\begin{aligned} P(W_q \leq 12) &= 1 - P(W_q > 12) = \\ &= 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)12} = \\ &= 1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{4}(1-\frac{2}{3})12} = \\ &= 1 - \frac{2}{3} e^{-1} \sim 75,5\% \end{aligned}$$

4 (6 val.)

Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte.

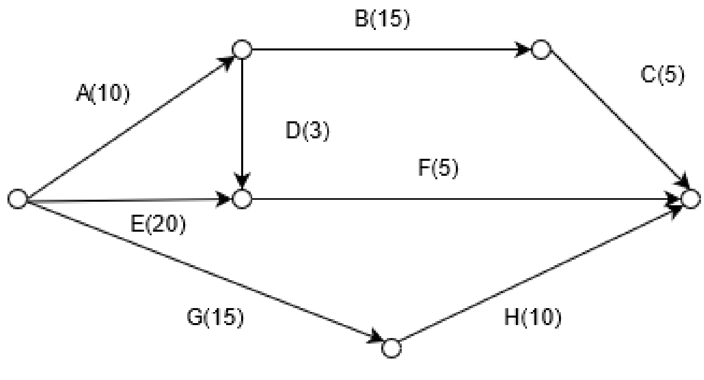
Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	
		μ	σ
A	—	10	2
B	A	15	1
C	B	5	3
D	A	3	5
E	—	20	2
F	D, E	5	1
G	—	15	4
H	G	10	3

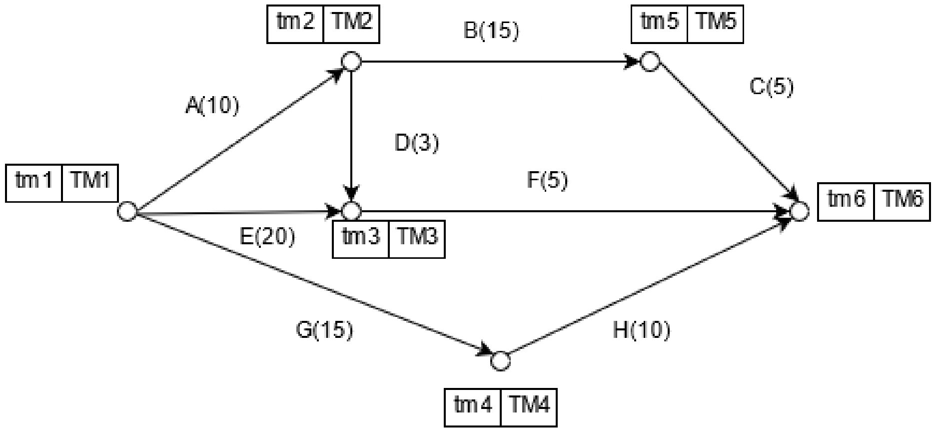
a) Determine a duração total média do empreendimento.

Resolução:

Para determinar a duração total média do projecto, desenhamos a rede com os tempos médios de cada actividade (μ).

Existem 3 actividades sem precedências, portanto sabemos que essas saem do nó inicial: A, E e G. As actividades que vão ter ao nó final são aquelas que não são precedência de nenhuma outra actividade: C, F e H.





Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20\} = \max\{13, 20\} = 20$
$tm_4 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_5 = tm_2 + 15 = 25$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 10, tm_3 + 5\} = \max\{30, 25, 25\} = 30$

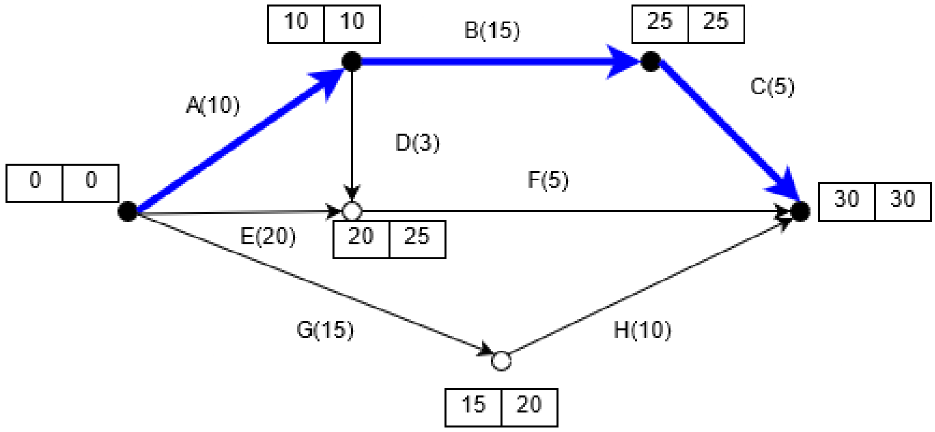
Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 30$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_4 = TM_6 - 10 = 20$
$TM_3 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 15, TM_3 - 3\} = \min\{10, 22\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_3 - 20, TM_4 - 15\} = \min\{0, 5, 5\} = 0$

Conclui-se assim que a duração total média do projecto é 30 unidades de tempo.

b) Determine o caminho crítico médio do empreendimento.

Resolução:

Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



Marcou-se a preto os nós críticos, em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 4 nós críticos: 1, 2, 5 e 6. As actividades que unem estes nós são candiatas a actividades críticas. Para serem actividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da actividade (para não ahver folgas).

Actividade	tm(i+1)-tm(i)	Duração	Conclusão
A	$tm2 - tm1 = 10$	10	actividade crítica
B	$tm5 - tm2 = 25 - 10 = 15$	15	actividade crítica
C	$tm6 - tm5 = 30 - 25 = 5$	5	actividade crítica

Conclui-se que todas as actividades são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C.

c) Recorrendo à técnica PERT, calcule a probabilidade de a duração total do empreendimento não exceder 28 u.t.

Resolução:

A técnica PERT assume durações aleatórias para as actividades de um projecto, assentando em três hipóteses:

Hip.1: as durações das várias actividades são independentes entre si;

Hip.2: as durações das várias actividades tÊm distribuições normais;

Hip.3: a duração total de um projecto pode considerar-se reduzida à duração do Caminho Crítico Médio (CCM).

Assim, pela Hip.3, a duração total do projecto é igual à duração do CCM:

$$D_{Tot} \sim D_{CCM} \sim D_A + D_B + D_C.$$

Pela Hip.2, temos que

$$\begin{aligned} D_A &\sim \mathcal{N}(10, 2) \\ D_B &\sim \mathcal{N}(15, 1) \\ D_C &\sim \mathcal{N}(5, 3) \end{aligned}$$

e pela Hip1,

$$D_A + D_B + D_C \sim \mathcal{N}(\mu = 10 + 15 + 5 = 30, \sigma = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14})$$

e, portanto,

$$D_{Tot} \sim \mathcal{N}(30, \sqrt{14}).$$

Assim, já se pode calcular a probabilidade de a duração total do empreendimento não exceder as 28 u.t.:

$$\begin{aligned} P\left[D_{Tot} \leq 28\right] &= P\left[\frac{D_{Tot} - 30}{\sqrt{14}} \leq \frac{28 - 30}{\sqrt{14}}\right] = \\ &= P\left[Z \leq \frac{-2}{\sqrt{14}}\right] = \\ &= P\left[Z \leq -0,5345\right] = \\ &= 1 - P\left[Z \leq 0,5345\right] = \\ &= 1 - 0,7019 = \\ &= 0.2981 = 29,81\% \end{aligned}$$

5 (3 val.) Todas as semanas a brigada de trânsito escolhe entre 2 zonas, A e B, para ficar a fiscalizar o trânsito. A escolha da zona é feita atirando uma moeda ao ar. Se sair cara, ficam na zona A e se sair coroa ficam na zona B. O número de infracções registas por semana, quer na zona A, quer na zona B, é dado pela variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 50 \\ 0{,}03\,, & 0 \leq 50 \leq x < a \\ 0,01\,, & a \leq x < 110 \\ 0\,, & x \geq 110 \end{cases}$$

a) Determine o valor do parâmetro a.

Resolução:

Para calcular o valor de a, sabemos que o integral em $\mathbb{R}$ da função densidade de probabilidade é igual a 1:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \int_{-\infty}^{50} f_X(x)\, dx + \int_{50}^{a} f_X(x)\, dx + \int_{a}^{110} f_X(x)\, dx + \int_{110}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \int_{-\infty}^{50} 0\, dx + \int_{50}^{a} 0,03\, dx + \int_{a}^{110} 0,01\, dx + \int_{110}^{+\infty} 0\, dx = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 0 + [0,03]_{50}^{a} + [0,01]_{a}^{110} + 0 = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 0,03a - 1,5 + 1,1 - 0,01_a = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 0,02a = 1,4 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & a = 70
\end{aligned}
$$

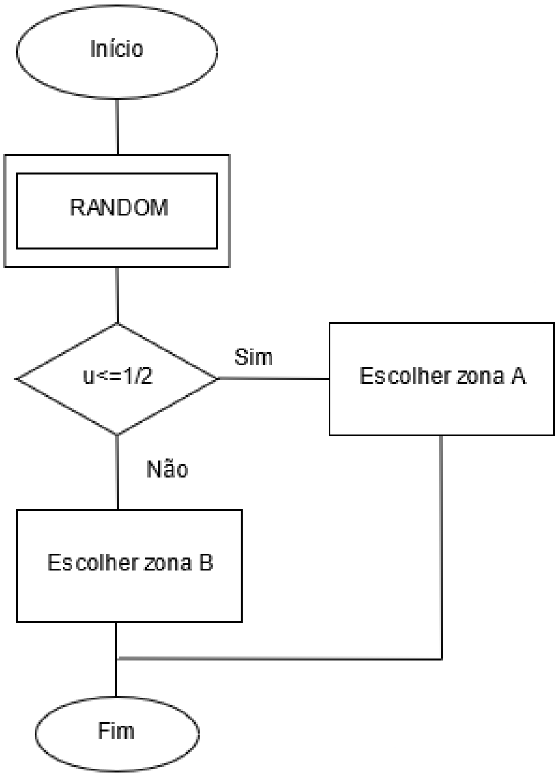
b) Elabore uma rotina que determine a zona escolhida para ser fiscalizada em cada semana. Apresente o fluxograma associado.

Resolução:

Sabendo que a escolha de zona é feita atirando uma moeda (equilibrada) ao ar e que $P(cara) = P(coroa) = \frac{1}{2}$, construimos a seguinte rotina:

1. Gerar um NPA[0,1], u
2. Se $u \leq \frac{1}{2}$, então escolhe-se cara (zona A). Caso contrário, escolhe-se coroa (zona B).

Temos o seguinte fluxogrma.



c) Recorrendo ao Método da Rejeição, elabore a rotina que gera o número de infracções registada em cada semana, ou seja, que permite simular o número de infracções semanais. Apresente o fluxograma associado.

Resolução:

Para usar o Método da Rejeiraçõ, seguimos os seguintes passos.

1. Gera-se um $NPA[0,1]: \ U_1$
2. Para o intervalo $[a,b] = [50,110]$, constrói-se a variável

$$X_1 = a + (b-a)U_1 = 50 + (110-50)U_1 = 50 + 60U_1$$

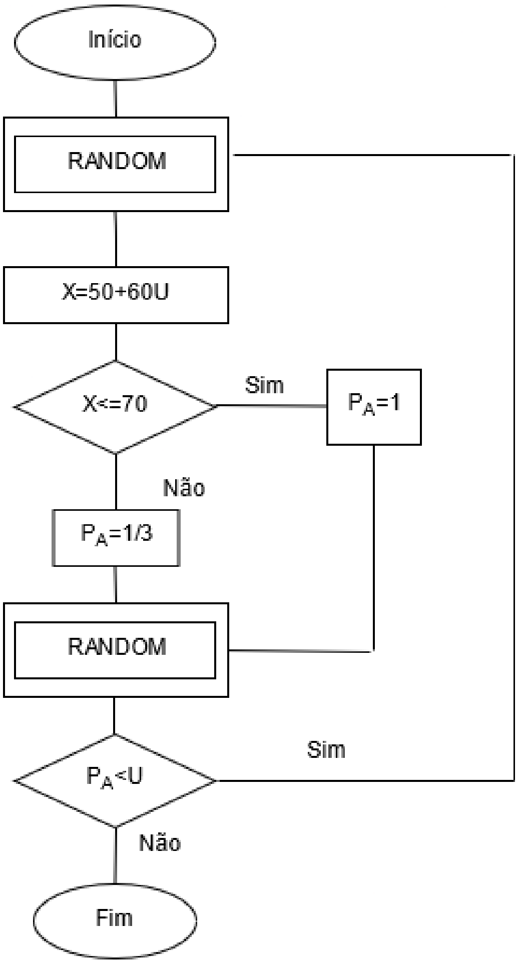
   Note-se que $X_1 \in [50,110]$ porque $U_1 \in [0,1]$.
3. Tendo em conta que a moda está no intervalo $[50,70]$, sai que $f_X(mod) = 0,03$. Assim

$$P_A = \frac{f_X(X_1)}{f_X(mod)} = \begin{cases} 1, & 50 \leq X_1 < 70 \\ \frac{1}{3}, & 70 \leq X_1 \leq 110 \end{cases}$$

4. Gera-se um $NPA[0,1]: \ U_2$

5. Se $P_A < U_2$ rejeita-se X_1 e retorna-se ao passo 1. Caso contrário, aceita-se X_1 como $NPAX$.

Temos o seguinte fluxogrma.



FIM