3. ESTATÍSTICA INDUTIVA

A estatística indutiva é o ramo da estatística que se ocupa em inferir das conclusões retiradas sobre a amostra para a população. Claro que o processo de indução implica um certo grau de incerteza associado à tentativa de generalização de conclusões da “parte” (amostra) para o “todo” (universo). O conceito de probabilidade vai ter aqui, então, um papel fundamental. Isto é, não vai ser possível afirmar com toda a certeza que o comportamento da amostra ilustra perfeitamente o comportamento do universo, mas apenas que o faz com forte probabilidade.

De seguida, serão apresentadas algumas noções simples de probabilidades e funções de probabilidade, que serão úteis a aplicações de estatística indutiva relacionadas com controlo estatístico de qualidade e fiabilidade de componentes e sistemas.

3.1. Noções básicas de probabilidade

A teoria das probabilidades é um ramo da matemática extremamente útil para o estudo e a investigação das regularidades dos chamados fenómenos aleatórios. O exemplo seguinte pretende clarificar o que vulgarmente é designado por experiência aleatória.

Deve entender-se como **experiência** qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir resultados observáveis; quando uma experiência está sujeita à influência de factores casuais e conduz a resultados incertos, diz-se que a experiência é **aleatória**.

Fundamentalmente, as experiências aleatórias caracterizam-se por:

(i) poder repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições ou em condições muito semelhantes

(ii) cada vez que a experiência se realiza, obtém-se um resultado individual, mas não é possível prever exactamente esse resultado

(iii) os resultados das experiências individuais mostram-se irregulares, mas os resultados obtidos após uma longa repetição da experiência patenteiam uma grande regularidade estatística no seu conjunto

Alguns autores consideram inserido no conceito de experiência aleatória um outro, o de **espaço de resultados**. O espaço de resultados corresponde ao conjunto formado por todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Por exemplo, num lançamento de um dado ordinário tem-se que o espaço de resultados é $\{1,2,3,4,5,6\}$.

A importância da definição deste conceito advém sobretudo por ser o meio empregue para a definição de **acontecimentos**, que não sei mais que subconjuntos do espaço de resultados. Por exemplo, no lançamento de um dado podem definir-se, para além dos 6 acontecimentos elementares correspondentes à saída de cada uma das faces, outros como "saída de um número ímpar" definido pelo subconjunto $\{1,3,5\}$.

Definidos como conjuntos, aos acontecimentos é aplicável toda a construção disponível para aqueles, isto é, existe um paralelismo perfeito entre **álgebra de conjuntos** e **álgebra de acontecimentos**:

(i) O acontecimento que contem todos os elementos do espaço de resultados chama-se **acontecimento certo**

(ii) O acontecimento que não contem qualquer elemento do espaço de resultados chama-se **acontecimento impossível**

(iii) Dois acontecimentos são **mutuamente exclusivos** se não têm em comum qualquer acontecimento do espaço de resultados

(iv) A **união** de dois acontecimentos A e B representa-se por $A \cup B$ e é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois, A ou B

(v) A **intersecção** de dois acontecimentos A e B representa-se por $A \cap B$ e é formado pelos elementos comuns a A e B

Probabilidade de um acontecimento é expressa na escala de 0 a 1, sendo 0 a probabilidade associada a um acontecimento impossível e 1 a probabilidade associada a um acontecimento certo. A primeira definição foi proposta por Laplace em 1812. Pode definir-se **probabilidade de um acontecimento A** como sendo:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis ao acontecimento A}}{\text{Número total de casos possíveis na exp. aleatória}}$$

Uma das principais críticas a esta definição é a de que ela só é aplicável quando o espaço de resultados é finito e os seus elementos possuem igual probabilidade; daí que ela surja muito ligada aos "jogos de azar", que possuem essas propriedades. É o que acontece com as duas faces de uma moeda, as 52 cartas de um baralho, as 6 faces de um dado, etc.

Para se analisar a probabilidade de ocorrência de determinados acontecimentos, deve ter-se em atenção o seguinte:

- Dois acontecimentos são ditos mutuamente exclusivos se não puderem acontecer ao mesmo tempo; se dois acontecimentos forem mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cap B) = 0$$

- A probabilidade de união de dois acontecimentos mutuamente exclusivos é dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Para dois acontecimentos quaisquer, vem que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Dois acontecimentos dizem-se complementares se:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

- Dois acontecimentos são ditos independentes se a ocorrência de um não afectar a probabilidade de ocorrência de outro; a probabilidade de ocorrência de dois ou mais acontecimentos independentes é o produto das probabilidades dos respectivos acontecimentos, isto é:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Após a apresentação desta definição, convém ainda referir que, numa outra perspectiva, a da chamada **teoria frequencista**, a probabilidade de um acontecimento é definida como sendo o valor para o qual tende a frequência relativa do acontecimento quando o número de repetições da experiência aumenta.

3.2. Probabilidade condicionada

Exemplo:

Um grupo de pessoas é classificado de acordo com o seu peso e a incidência de hipertensão. São as seguintes as proporções das várias categorias:

	Obeso	Normal	Magro	Total
Hipertenso	0,1	0,08	0,02	0,2
Não Hipertenso	0,15	0,45	0,2	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	**1,00**

a) Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser hipertensa?
b) Qual a probabilidade de uma pessoa obesa ser hipertensa?

Resolução

a) Basta ver que a proporção de hipertensos é de 20%
b) Há que tomar em atenção que o que se pretende é a proporção de hipertensos na população de obesos, isto é $\frac{0,1}{0,25} = 0,4$. Por outras palavras, pretende-se calcular a probabilidade do acontecimento "ser hipertenso", sabendo que ocorreu o acontecimento "ser obeso". Repare-se que este quociente resulta da divisão entre a probabilidade de uma pessoa ser hipertensa e obesa e a probabilidade de uma pessoa ser obesa. Pode escrever-se que a probabilidade pretendida é dada por:

$$P(H/O) = \frac{P(H \cap O)}{P(O)}$$

onde P(H/O) é a probabilidade de ocorrer o acontecimento "ser hipertenso", sabendo que ocorreu ou condicionado pelo acontecimento "ser obeso".

Este exemplo corresponde ao cálculo de uma **probabilidade condicionada**.

Como se viu anteriormente, dois acontecimentos são ditos independentes se a ocorrência de um não afectar a probabilidade de ocorrência de outro, isto é, se: P(A / B) = P(A) e se P(B / A) = P(B).

Teorema de Bayes

Seja B um acontecimento que se realiza se e só se um dos acontecimentos mutuamente exclusivos A_1, A_2,…A_n se verifica. Aos acontecimentos A_1, A_2,…A_n dá-se o nome de acontecimentos antecedentes. O teorema de Bayes permite calcular a probabilidade à posteriori de A_1, A_2,… A_n, isto é, a probabilidade de ocorrência de A_1, A_2,… A_n calculadas sob a hipótese de que B (acontecimento consequente) se realizou. De acordo com este teorema:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)}$$

Este Teorema utiliza-se em situações em que a relação causal está invertida.

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)$ designa-se de **probabilidade total** de ocorrência do acontecimento B, isto é, é a probabilidade de ocorrência do acontecimento consequente B face a todos os possíveis acontecimentos A_1, A_2,… A_n que o podem ter antecedido (ou causado a sua ocorrência).

3.3. Funções de probabilidade

A probabilidade associada aos acontecimentos possíveis numa experiência aleatória obedecem, por vezes, a um padrão. Se associarmos a uma experiência aleatória uma variável X (por exemplo, associar aos resultados da experiência lançamento de um dado - que são 6 (saída de face 1 a 6) – a variável X:"Nº da face resultante do lançamento de um dado"), então pode ser constituída uma lei ou função de probabilidade (f(x)) dessa variável X, tal que

f(x) = P(X=xi)

Por exemplo, para X: nº da face resultante do lançamento de um dado, vem que:

xi	1	2	3	4	5	6
f(xi)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

que se designa por **lei uniforme**.

Algumas leis de probabilidade servem para explicar (ou aplicam-se a) um maior número de fenómenos estatísticos do que outras. Entre estas, contam-se a lei Binomial, a lei de Poisson e a lei Exponencial.

(i) Lei Binomial

Há alguns acontecimentos que são constituídos por um conjunto de experiências independentes, cada uma das quais com apenas dois estados possíveis de ocorrência e com uma probabilidade fixa de ocorrência para cada um deles. Por exemplo, os produtos resultantes de uma fábrica podem ser classificados como sendo defeituosos ou sendo não defeituosos, e o facto de um ter saído (ou não) defeituoso não influencia os outros serem (ou não). A distribuição das duas classes possíveis é discreta e do tipo binomial.

No exemplo anterior, consideremos uma amostra de **n** artigos retirados da produção total, em relação aos quais se pretende identificar a variável X: "Nº de artigos defeituosos nos n que constituem a amostra". A probabilidade de ocorrência do acontecimento "artigo é defeituoso" é dada por **p**: incidência de defeituosos na produção (convenientemente calculada através de métodos de estimação). A probabilidade do acontecimento complementar "artigo é não-defeituoso" é dada por

$$\mathbf{1 - p = q}$$

A probabilidade associada a **x** artigos defeituosos é dada por $\mathbf{p^x}$ (p x p x p x p...x vezes). Se há x defeituosos, restam n-x artigos não-defeituosos, com probabilidade dada por $\mathbf{q^{n-x}}$**.** Para calcular o número exacto de combinações de x artigos defeituosos com n-x artigos não-defeituosos, utiliza-se a figura "combinações de n, x a x, oriunda das técnicas de cálculo combinatório. Vem então que a probabilidade de existência de x defeituosos (e logo n-x não defeituosos) é igual a:

$$f(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} p^x q^{n-x}$$

sendo que X segue Bi (n;p), sendo **n** e **p** os parâmetros caracterizadores da lei.
Um acontecimento deve ter 4 características para que se possa associar a uma lei binomial:

- número fixo de experiências (n)
- cada experiência ter apenas duas classes de resultados possíveis
- todas as experiências terem igual probabilidade de ocorrência (p)
- as experiências serem independentes

Em sistemas eléctricos de energia é possível, por exemplo, aplicar a distribuição binomial quando se pretende calcular a fiabilidade de uma central eléctrica, com várias unidades iguais e admitindo que cada unidade apenas pode residir em dois estados, a funcionar ou avariada.

(ii) Lei de Poisson

A lei de Poisson (ou lei dos acontecimentos raros ou cadenciados) dá a probabilidade de um acontecimento ocorrer um dado número de vezes num intervalo de tempo ou espaço fixado, quando a taxa de ocorrência é fixa (por exemplo, nº de chamadas que chegam a uma central telefónica por minuto; nº de varias que ocorrem numa máquina por dia). Os números de acontecimentos de "sucesso" ocorridos em diferentes intervalos são independentes. O parâmetro caracterizador da distribuição de Poisson é λ, que corresponde ao número médio de ocorrências por unidade de tempo ou espaço.

Como o número médio de ocorrências do acontecimento é proporcional à amplitude do intervalo de tempo ou espaço a que se refere, a variável X: "Nº de ocorrências do acontecimento no intervalo [0,t[" segue lei de Poisson de parâmetro λt (isto é, se para 1 unidade de tempo o nº médio de ocorrências é λ, para t unidades de tempo o número médio de ocorrências é λt). A expressão

$$\frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

dá a probabilidade de acontecerem **x** ocorrências no intervalo de tempo [0,t[, e corresponde à expressão da lei de probabilidade de Poisson : Po(λt)

Por exemplo, se X fôr o “Nº de avarias que ocorrem no intervalo de tempo [0,t[”, então a probabilidade de não ocorrerem avarias nesse intervalo, isto é, a **fiabilidade** do componente/sistema como função do tempo, é dada por:

$$\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

(iii) Lei Exponencial

Seja T a variável “Tempo ou espaço que decorre entre ocorrências consecutivas de um acontecimento”. Então T segue lei exponencial Exp (λ), sendo

$$\frac{1}{\lambda}$$

o tempo que, em média, decorre entre ocorrências sucessivas do acontecimento.

Note-se que é possível estabelecer uma relação entre a lei exponencial e a lei de Poisson. Assim, se X fôr o “Nº de avarias que ocorrem no intervalo de tempo [0,t[”, e T fôr o “Tempo que decorre entre avarias consecutivas”, então:

P (T>t) = P(tempo que decorre entre avarias exceder t)

= P(até ao instante t, não ocorre qualquer avaria)

= P (ocorrerem zero avarias no intervalo [0,t[) **= P(X=0) =** $e^{-\lambda t}$

A distribuição exponencial é a mais usada em estudos de fiabilidade, já que a probabilidade de um componente sobreviver até ao instante t é dada por

$$e^{-\lambda t}$$

A probabilidade de avariar até ao instante t é dada por

$$1 - e^{-\lambda t}$$

(iv) Lei Normal

A lei Normal tem como parâmetros caracterizadores a média μ e o desvio-padrão σ. Isto é, os valores observados têm uma determinada tendência central e uma determinada dispersão em torno da tendência central.

A expressão

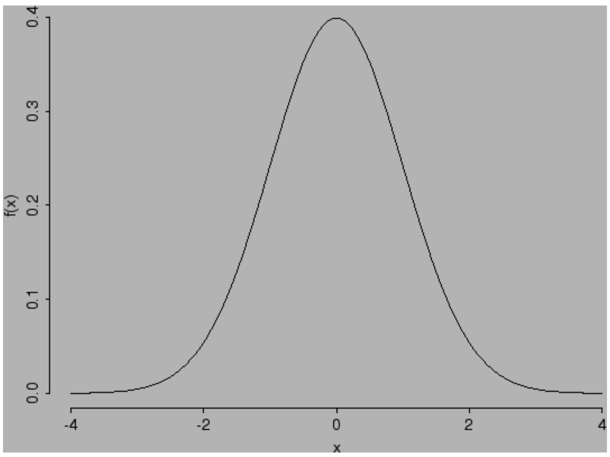
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2}\sum\frac{(Xi-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

representa a função densidade de probabilidade da distribuição Normal.

Se se fizer o valor médio μ igual a zero e todos os desvios forem medidos em relação à média, a equação será:

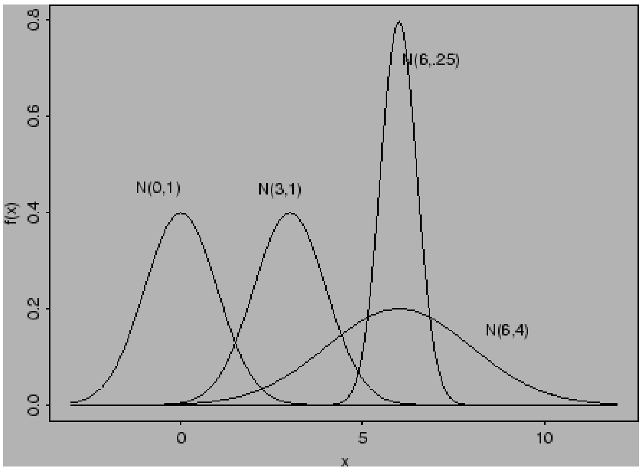
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

que corresponde a uma distribuição normal estandardizada (0;1) com os valores tabelados, a qual é caracterizada por uma curva de Gauss:



Esta distribuição apresenta 99,73% dos valores entre os extremos –3 e 3.

Existem muitos tipos de distribuição, mas a curva normal é a forma de distribuição mais frequente nos processos industriais para características mensuráveis, e pode considerar-se como estabelecida pela experiência prática.



(v) Lei Qui-Quadrado

Considere-se um conjunto de n variáveis aleatórias Z_i, obedecendo às seguintes condições:

- cada variável Z_i segue distribuição N(0,1);
- as variáveis Z_i são mutuamente independentes

Então, a variável aleatória X, construída a partir da soma das n variáveis Z_i elevadas ao quadrado, segue distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade, denotada por

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$$

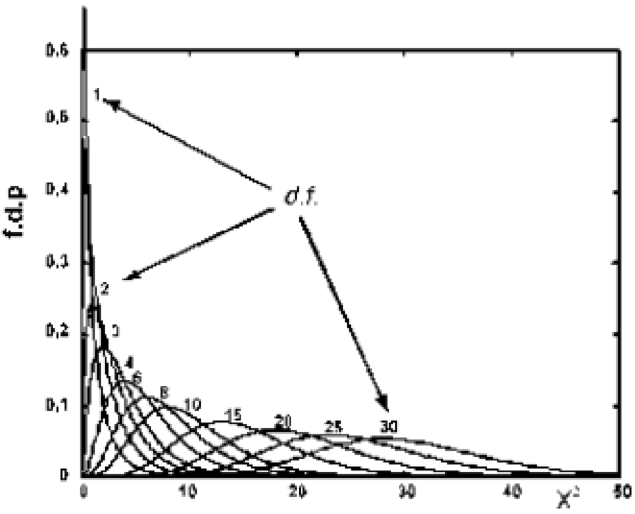
$$X \cap \chi_n^2$$

O termo "Graus de Liberdade" (d.f: degrees of freedom) é habitualmente usado para designar o número n de parcelas (variáveis Z_i) adicionadas. É possível demonstrar que o valor esperado e a variância da distribuição de uma variável Qui-Quadrado são respectivamente

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$

A distribuição Qui-Quadrado é uma distribuição assimétrica à esquerda, aproximando-se da distribuição Normal à medida que n cresce.



f.d.p
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
6
8
10
15
20
25
30
d.f.
0
10
20
30
40
50
χ^2