UNIDADE CURRICULAR: ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

CÓDIGO: 21037

DOCENTE: Catarina Nunes
TUTOR: Elsa Negas

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Seja X - v.a. que representa o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos.

1.1 - 0.5 valores

Sabemos que $X \sim P(\lambda)$, e que neste caso, $E(X) = V(X) = \lambda$. Então utilizando a fórmula

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Leftrightarrow \lambda = 6 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -3 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

Como $\lambda > 0$, necessariamente $\lambda = 2$. Assim $X \sim P(2)$, tendo-se

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}, \quad k \in \aleph_0$$

(50% cotação)

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 2e^{-2} \cong 0.27067$$

(50% cotação)

1.2 - 0.4 valores

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k) =$$

(50% cotação)

$$= 1 - \left(e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2}{1!} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-2}\frac{2^3}{3!}\right) = 1 - \frac{19}{3}e^{-2} \cong 0.14288$$

(50% cotação)

2.

2.1 - 0.4 valores

$$P(X+Y \geq 5) = P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

(50% cotação)

$$P(X=2) = P(X=2, Y \in \Re) = P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=3) = 0.2$$

(50% cotação)

2.2 - 0.7 valores

As funções de probabilidade marginais são dadas por

$$g_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \{0,1,2,3\}} P(X=x, Y=y), \quad x \in \Re$$

(25% cotação)

$$g_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x \in \{1,2,3\}} P(X=x, Y=y), \quad y \in \Re$$

(25% cotação)
Consequentemente

$$g_X(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 1 \\ 0.2, & x = 2 \\ 0.3, & x = 3 \\ 0, & x \notin \{1,2,3\} \end{cases}$$

(25% cotação)

$$g_Y(y) = \begin{cases} 0.3, & y \in \{0,2\} \\ 0.2, & y \in \{1,3\} \\ 0, & y \notin \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

(25% cotação)

2.3 - 0.4 valores

As variáveis X e Y serão independentes se e só se

$$\forall (x,y) P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

(50% cotação)
Como, por exemplo

$$P(X=1, Y=0) = 0.1 \neq 0.5 \times 0.3 = P(X=1)P(Y=0)$$

Concluímos que as variáveis X e Y não são independentes.
(50% cotação)

2.4 - 0.7 valores

$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. *(20% cotação)*
Uma vez que

$$E(X) = \sum_{x \in \{1,2,3\}} xP(X=x) = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 = 1.8$$

(20% cotação)

$$E(Y) = \sum_{y \in \{0,1,2,3\}} xP(X=x) = 1.4$$

(20% cotação)

$$E(XY) = \sum_{(x,y)} xyP(X=x, Y=y) = 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 1 \times 0.2 + \ldots + 2 \times 3 \times 0.2 = 2.5$$

(20% cotação)
e $COV(X,Y) = 2.5 - 1.8 \times 1.4 = -0.02$.
(20% cotação)

2.5 - 0.6 valores

A função de probabilidade de Y condicionada por $X = 1$ é definida por

$$g_{Y/X=1}(y) = \frac{g_{(X,Y)}(1,y)}{g_X(1)} = \frac{P(X=1, Y=y)}{P(X=1)}, \quad y \in \Re$$

(50% cotação)
consequentemente

$$g_{Y/X=1}(y) = \begin{cases} \frac{0.1}{0.5} = 0.2, & y \in \{0,2,3\} \\ \frac{0.2}{0.5} = 0.4, & y = 1 \\ 0, & y \notin \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

(50% cotação)

2.6 - 0.3 valores

$$E(Y/X=1) = \sum_{y \in \{0,1,2,3\}} y g_{Y/X=1}(y) =$$

(50% cotação)

$$= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 = 1.4$$

(50% cotação)

FIM