E-Fólio A - Resolução

1. Considere a seguinte função
$$f(x) = \log(x+1) - 1.$$

   (a) **[0.4 val.]** Indique o domínio e contradomínio da função f.
   Para determinar o domínio de f notamos que, uma vez que a função logarítmica apenas está definida para reais positivos, devemos impor que $x + 1 > 0$, ou seja $x > -1$, pelo que o domínio de f será
$$D_f =]-1, +\infty[.$$
   Sabemos que o contradomínio da função $g(x) = \log(x)$ é $D'_g = \mathbb{R}$. Podemos interpretar o gráfico da função f como resultando da aplicação de uma translacção vertical e outra horizontal (ambas de uma unidade) ao gráfico da função g, pelo que o contradomínio de f é também
$$D'_f = \mathbb{R}.$$

   (b) **[0.4 val.]** Esboce o gráfico de f. Tendo em conta a alínea anterior, sabemos que o domínio é o intervalo $]-1, +\infty[$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Para além disso, podemos reparar que
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (\log(x+1) - 1) = -\infty.$$
   Por outro lado temos $f(0) = \log(0+1) - 1 = -1$ pelo que um esboço do gráfico poderia ser o seguinte

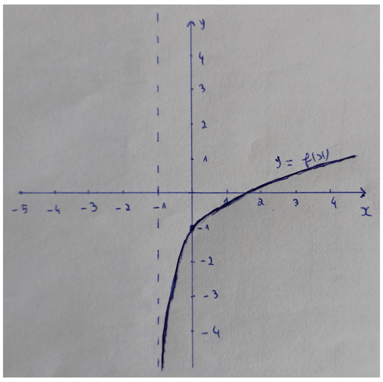

Figura 1: Esboço do gráfico de f.

   (c) **[0.4 val.]** Caracterize a função inversa de f.
   Assumindo que $y \in D_f =]-1, +\infty[$, temos
$$\begin{aligned} x = f(y) &\iff x = \log(y+1) - 1 \iff x + 1 = \log(y+1) \\ &\iff e^{x+1} = y + 1 \iff e^{x+1} - 1 = y \iff f^{-1}(x) = y. \end{aligned}$$
   Então a função inversa de f é
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]-1, +\infty[$$
$$f^{-1}(x) = e^{x+1} - 1.$$

2. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x^3 e^{2x}}{x^4 + 3}, & x < 1 \\ \\ \dfrac{3x^2 + \cos(3x+1)}{x^2 + 2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Estude a continuidade da função f no seu domínio.

Para $x < 1$, f é definida como a soma, produto, divisão e composição de funções polinomiais e da função exponencial, ou seja f é uma função elementar. Por outro lado, o denominador nunca se anula, pois

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 3 \geq 3 > 0.$$

Então para $x < 1$, a função f é contínua.

Analogamente, também para $x > 1$, a função f é elementar e o denominador também não se anula,

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 > 0,$$

pelo que a função f também é contínua para $x > 1$.

Para estudar a continuidade de f no ponto de mudança de troço, $x = 1$, devemos calcular

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x^3 e^{2x}}{x^4 + 3} = \frac{1 - 3e^2}{4}$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + \cos(3x+1)}{x^2 + 2} = \frac{3 + \cos(4)}{3}.$$

Notamos que

$$\frac{1 - 3e^2}{4} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{3 + \cos(4)}{3} > 0,$$

pelo que, em particular,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

e a função f não é contínua no ponto $x = 1$. Concluímos que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mas não é contínua no ponto $x = 1$.

(b) **[0.5 val.]** Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Temos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x^3 e^{2x}}{x^4 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4} - \frac{3x^3 e^{2x}}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} + \frac{3}{x^4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3e^{2x}}{x}}{1 + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0,$$

pois

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \ \lim_{x \to -\infty} \frac{3e^{2x}}{x} = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^4} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+\cos(3x+1)}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{\cos(3x+1)}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{\cos(3x+1)}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}.$$

Agora notamos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

e

$$-1 \leq \cos(3x+1) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que, para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(3x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \text{ e também, } \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0,$$

pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(3x+1)}{x^2} = 0,$$

pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Uma resolução alternativa para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ seria notar que, como

$$-1 \leq \cos(3x+1) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

então

$$\frac{3x^2-1}{x^2+2} \leq \frac{3x^2+\cos(3x+1)}{x^2+2} \leq \frac{3x^2+1}{x^2+2}.$$

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{3-0}{1+0} = 3,$$

pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

De forma análoga, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Então, pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

(c) **[0.2 val.]** Calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[0,2]$.
Temos

$$\Delta(f;0,2)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{12+\cos(7)}{6}-0}{2}=\frac{2+\frac{\cos(7)}{6}}{2}=1+\frac{\cos(7)}{12}.$$

3. **[0.55 val.]** Prove por definição formal de limite que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin(x^2+2x)+2\right)=2.$$

Pretendemos provar que

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ 0<|x|<\delta\Rightarrow\left|\left(x^2\sin(x^2+2x)+2\right)-2\right|<\epsilon.$$

Temos que

$$\left|\left(x^2\sin(x^2+2x)+2\right)-2\right|=\left|x^2\sin(x^2+2x)\right|=\left|x^2\right|\underbrace{\left|\sin(x^2+2x)\right|}_{\leq 1}\leq|x^2|=x^2.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon>0$, basta tomar $\delta=\epsilon^{\frac{1}{2}}$, para que, sempre que $|x|<\delta$, se tenha necessariamente

$$\left|\left(x^2\sin(x^2+2x)+2\right)-2\right|\leq x^2<\delta^2=\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2=\epsilon.$$

Concluímos, portanto, que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin(x^2+2x)+2\right)=2.$$

4. **[0.55 val.]** Calcule

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2-7x-4}{x^3+x^2-x-1}.$$

A substituição directa de x por -1 conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, o que implica que $x=-1$ é um zero comum dos polinómios do numerador e denominador. Podemos factorizar ambos os polinómios, por exemplo, usando a regra de Ruffini e obter

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -7 & -4 \\ -1 & & -1 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

ou seja, obtemos que $x^3-2x^2-7x-4=(x+1)(x^2-3x-4)$. Aplicando o mesmo processo ao denominador

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

verificamos que $x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1)$. Assim,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 7x - 4}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-3x-4)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$$

e notamos que temos novamente uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos factorizar o polinómio do denominador de forma imediata $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. No caso do polinómio do numerador podemos recorrer à fórmula resolvente e obtemos

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 4 \times 4}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

logo as raizes são $x = -1$ e $x = 4$, pelo que $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$. Então

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 7x - 4}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-4)}{(x-1)} = \frac{5}{2}.$$

5. **[0.5 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e vamos designar por D'_f o contradomínio de f. Sabendo que

$$\{3, -4\} \subset D'_f$$

indique, justificando, qual o valor lógico da seguinte proposição:

"A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real".

Uma vez que $3 \in D'_f$, podemos concluir que existe (pelo menos) um ponto $x_1 \in D_f = \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 3 > 0$ e, da mesma forma, como $-4 \in D'_f$, também existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_2) = -4 < 0$. Então f é uma função contínua que muda de sinal no intervalo $]\min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)[$, pelo que, pelo teorema de Bolzano concluímos que a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real, pelo que a proposição é verdadeira.