

Estado	Terminadas
Iniciado em	quarta-feira, 15 outubro 2025, 22:46
Completado em	quinta-feira, 16 outubro 2025, 00:05
Tempo usado	1 hora 18 minutos
valores	11,00/11,00
Avaliação	1,00 num máximo de 1,00 (100%)

Miguel está a aprender sobre funções reais de variável real nas aulas de Análise Infinitesimal da Universidade AbERTA. Para ele isso soava abstrato demais, mas ao longo das aulas, Miguel começou a perceber melhor que **uma função real de variável real é uma regra que associa cada número real (da variável) a outro número real (o resultado)**. Em termos simples:

É como uma máquina que recebe um número real e devolve outro número real, seguindo uma regra específica.

Miguel estava no supermercado e viu uma promoção, associando logo o que aprendeu nas aulas:

"Para cada euro gasto, ele recebe 0,1 euro de desconto."



Onde:

- x é o número de euros gastos (variável real).
- $f(x)$ é o desconto recebido (também um número real).

Se Miguel gastar 20 euros no supermercado, receberá 2 euros de desconto.

Uma **função f** é um procedimento que para cada argumento x num certo conjunto de objectos X , retorna um valor $f(x)$ noutro conjunto Y .

Em outras palavras, uma função é como uma regra ou receita que pega um valor (chamado de argumento - x) e devolve outro valor (chamado de resultado - $f(x)$). Por exemplo:

Se a função for "multiplicar por 2", então:

- Se colocarmos 3, ela devolve 6.
- Se colocarmos 5, ela devolve 10.

Conjuntos envolvidos

O **conjunto X** diz-se o **domínio de f** , e os **elementos de X** dizem-se os **argumentos de f** . Para expressar o facto de f ter domínio X diz-se também que a função f está definida para os argumentos de X . Ou seja, o **conjunto X é o grupo de valores que podemos colocar na função**. Chamamos isso de **domínio**.

O **conjunto Y** representa o tipo de valores retornado por f , e o **objecto $f(x)$** diz-se o **valor de f no argumento x** . Ou seja, o **conjunto Y é o grupo de valores que resultam da função**. É onde estão os **resultados**.

Se temos uma função f , e colocamos um valor x do conjunto X , ela devolve $f(x)$, que é um valor do conjunto Y .

Imagem ou contradomínio da função

Chama-se **imagem ou contradomínio de uma função f** ao subconjunto de Y formado por todos os seus valores. A imagem da função é o conjunto de todos os resultados que realmente aparecem quando usamos os valores do domínio.

Por exemplo, se temos um domínio $\{1, 2, 3\}$ e a função for $f(x) = x^2$, então a imagem será $\{1, 4, 9\}$.

Denota-se o conjunto imagem de f por:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y.$$

Dados conjuntos X e Y , a expressão $f: X \rightarrow Y$ abrevia a afirmação: f é uma função com domínio X e valores em Y . Em outras palavras, estamos a dizer que f é uma função que usa valores do conjunto X e devolve valores no conjunto Y .

Variáveis

É habitual chamar-se **variável livre da função** a uma variável representando um argumento genérico de f , ou seja, a variável livre é aquela que escolhemos (e.g.: x).

Outra variável que represente um valor de f é chamada de **variável dependente da mesma função**, ou seja, a variável dependente é o resultado da função (e.g.: $y = f(x)$).

Quando escrevemos $y = f(x)$, isso quer dizer que o valor de y depende do valor de x . Por exemplo $y = 1/x$, o **termo x** representa a **variável livre** e o **termo y** a **variável dependente**, enquanto a expressão $y = f(x)$ traduz a relação **valor-argumento** entre estas duas variáveis, para a função ou procedimento f .

Se os valores que colocamos e os que obtemos são números reais (como 1.5, -3, $\sqrt{2}$...), ou seja, uma função com valores em $\mathbb{R}$, então temos uma **função real de variável real**.

Uma função f definida num subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ diz-se uma função de variável real. Neste manual abordam-se exclusivamente funções reais de variável real.

Pergunta 1

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Considere a função $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Indique o **domínio** e o **contradomínio da função f** .

Contradomínio da função f

Domínio da função f

A sua resposta está correta.

O **domínio** é o conjunto de valores de x para os quais a função está definida.

A função está definida para:

- De -1 até 1 , usando a regra $f(x) = x^2$
- De 1 até 2 , usando a regra $f(x) = 2x - 1$

Então o **domínio** é: $[-1, 2]$

O **contradomínio** é o conjunto de todos os valores possíveis que a função pode devolver (valores de $f(x)$), ou seja, a **imagem da função**.

Vamos analisar cada parte:

1. Para $x \in [-1, 1]$ com $f(x) = x^2$:

- O menor valor de x^2 é quando $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$
- O maior valor é quando $x = -1$ ou $x = 1 \rightarrow f(-1) = f(1) = 1$
- Então essa parte da função gera valores entre **0 e 1**

2. Para $x \in (1, 2]$ com $f(x) = 2x - 1$:

- O menor valor é quando x se aproxima de $1 \rightarrow f(x) \rightarrow 1$ (mas não inclui 1)
- O maior valor é quando $x = 2 \rightarrow f(2) = 3$
- Então essa parte gera valores entre **maior que 1 até 3**.

Ao unir tudo, a imagem da função (ou **contradomínio**) é: $[0, 1] \cup (1, 3] = [0, 3]$

A resposta correcta é: Contradomínio da função $f \rightarrow [0, 3]$, Domínio da função $f \rightarrow [-1, 2]$

Modos de definir funções

E como podemos definir as funções?

Exemplo 1 *Através de uma expressão algébrica.*

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(u) = \frac{ue^u}{1 - u^2}, \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Cada expressão algébrica determina naturalmente um domínio para a função correspondente, formado pelos argumentos para os quais a expressão tenha significado.

Exemplo 2 *Através de um algoritmo.*

Dada uma função $y = f(x)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, define-se uma nova função $g(x)$ pelo seguinte algoritmo geométrico sobre o gráfico de f .

1. Encontre o ponto de intersecção P entre a diagonal $y = x$ e a recta horizontal que passa pelo ponto $(x, f(x))$;
2. Encontre o ponto de intersecção Q entre o gráfico $y = f(x)$ e a recta vertical que passa pelo ponto P ;
3. Retorne $g(x)$ igual à ordenada de Q ;

Faça um esboço com a construção geométrica de $g(x)$ e relacione a função g com f .

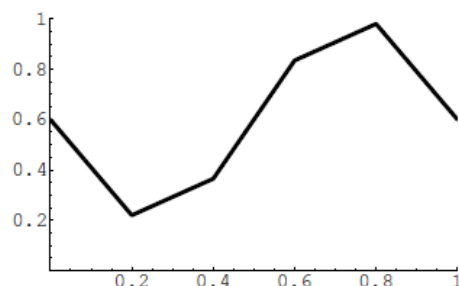
Exemplo 3 *Por regras condicionais.*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Exemplo 4 *Através de uma tabela*

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.6	0.219	0.365	0.835	0.98	0.6

Exemplo 5 *Através de um gráfico*



Pergunta 2

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Representação gráfica de funções

As funções podem ser representadas através de gráficos.

Chama-se **gráfico de uma função** $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ao **conjunto de todos os pontos** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \in D$ e $y = f(x)$. O gráfico de uma função $f(x)$ definida algebricamente é sempre uma curva, (eventualmente com vários ramos). Por exemplo o gráfico da função $f(x) = 1/x$, com domínio $\mathbb{R} - \{0\}$, é uma hipérbole com dois ramos.

O gráfico de uma função é uma forma de desenhar a função num plano com dois eixos:

- O eixo horizontal (x) mostra os valores que colocamos na função.
- O eixo vertical (y) mostra os resultados que a função devolve.

Cada ponto do gráfico tem a forma (x, y) , onde $y = f(x)$.

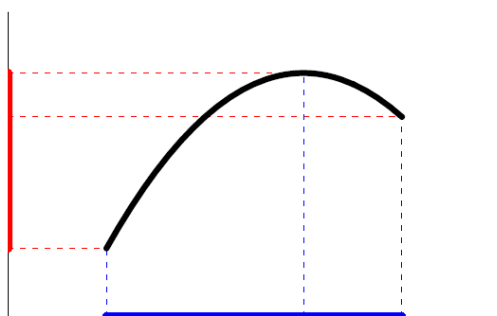
Se a função for $f(x) = x^2$, então:

$$f(1) = 1 \rightarrow \text{ponto } (1, 1)$$

$$f(2) = 4 \rightarrow \text{ponto } (2, 4)$$

$$f(-1) = 1 \rightarrow \text{ponto } (-1, 1)$$

Se ligarmos todos esses pontos, obtemos uma **curva chamada parábola**.



Reciprocamente, uma curva $C \subseteq \mathbb{R}^2$ define o gráfico de uma função se, e só se, nenhuma recta vertical intersectar C em mais do que um ponto.

O **domínio da função** f definida por C é o conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que a recta vertical por $(x, 0)$ intersecta C . O domínio são **todos os valores de x onde a curva aparece (ou seja, onde há pontos no gráfico)**.

Analogamente, a **imagem da função** f é o conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que a recta horizontal por $(0, y)$ intersecta C . A imagem são **todos os valores de y que aparecem no gráfico (os resultados da função)**.

Mas como saber quando uma curva desenhada representa uma função?

Basta fazer o **teste da reta vertical**:

- Se nenhuma reta vertical (reta que sobe e desce) cortar a curva em mais de um ponto, então é uma função.
- Se cortar em dois ou mais pontos, não é uma função (porque um mesmo valor de x daria dois resultados diferentes).

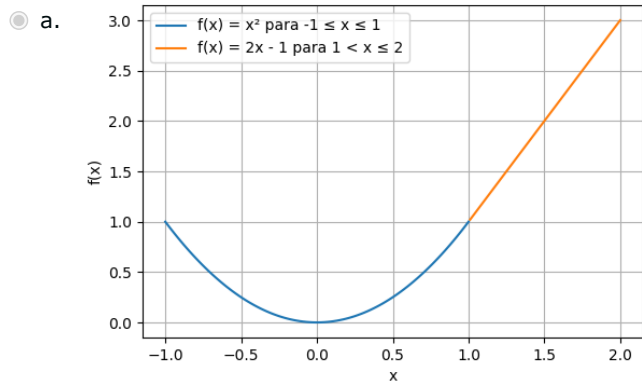
Exercício

Considere a função $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

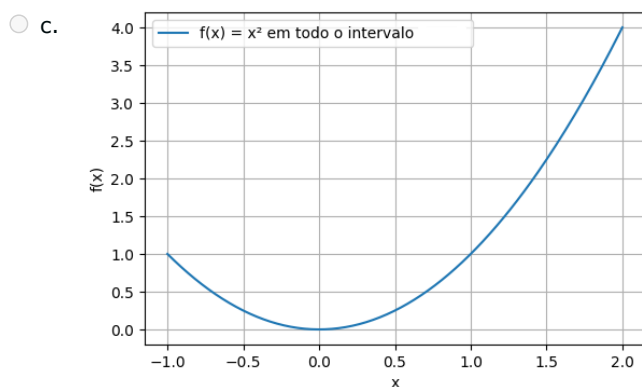
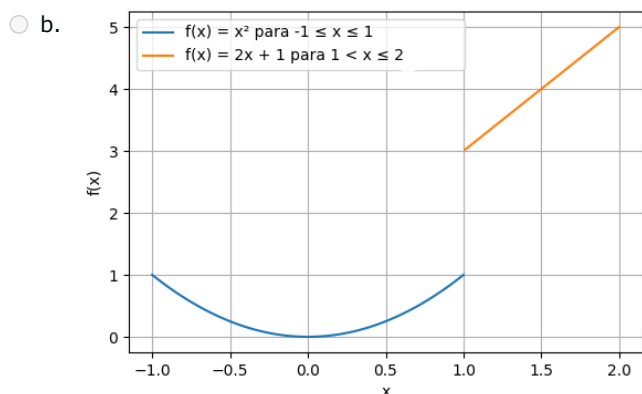
Esboce o gráfico de f e selecione a opção correta:

Selecione uma opção:



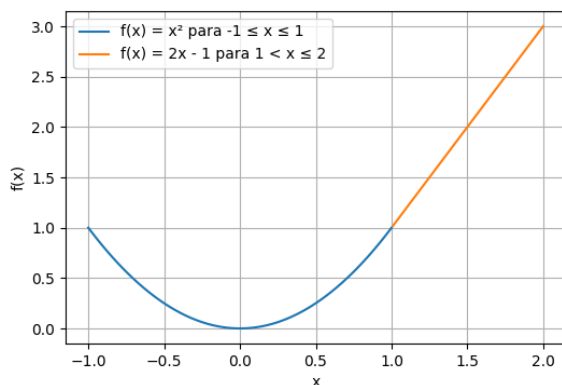
✓ A função está corretamente dividida em duas partes:

- $f(x) = x^2$ para $-1 \leq x \leq 1$
- $f(x) = 2x - 1$ para $1 < x \leq 2$



A sua resposta está correta.

Resposta correta:

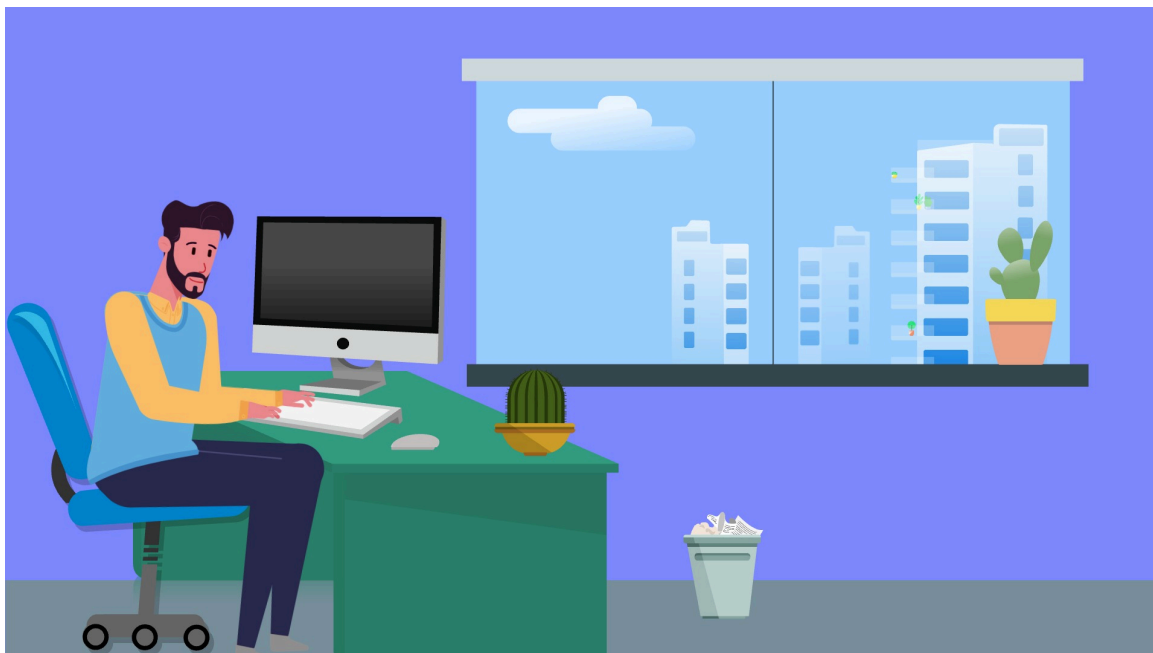


Pergunta **3**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Hoje o Miguel está a trabalhar na escola para criar um sistema onde cada aluno tem um **código único**. Cada utilizador tem um ID e o sistema gera um código de acesso individual para cada um. Se dois alunos diferentes tiverem **o mesmo código**, o sistema dá erro.



Miguel lembrou-se das aulas de Análise Infinitesimal, quando aprendeu sobre **Injectividade e funções inversas**. Vamos aprender um pouco sobre isso e ajudar o Miguel a criar esse sistema?

Quando o Miguel precisa criar um código diferente para cada valor de entrada, depara-se com algo parecido à uma função injetiva.

Afinal, o que é uma função injetiva?

Numa função injetiva, cada valor de entrada (x) tem um resultado ($f(x)$) diferente.

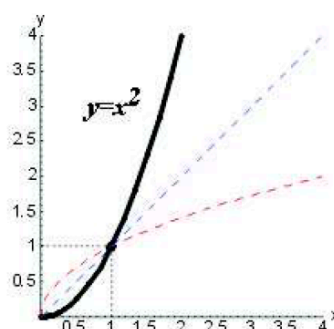
Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. f diz-se injectiva sse quaisquer que sejam $x, y \in D$. Ou seja:

Se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Logo, dois valores diferentes **nunca** podem dar o **mesmo resultado**.

Em termos de **gráfico**, uma função f é injectiva sse nenhuma recta horizontal intersecta o seu gráfico em mais do que um ponto. Isso quer dizer que cada altura (valor de y) aparece no máximo uma vez.

Exemplo 1 $y = x^2, (x \geq 0)$



Função inversa

Se a função é injetiva, podemos fazer o caminho inverso: descobrir qual foi o valor de entrada a partir do resultado.

Seja f uma função injectiva. A função inversa de f , denotada por f^{-1} , é uma função com domínio e imagem respectivamente iguais à imagem e domínio de f , que fica definida por $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

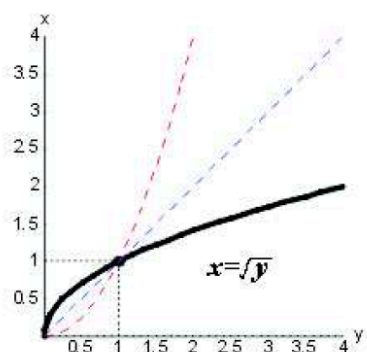
Por exemplo: Se $f(3) = 7$, então $f^{-1}(7) = 3$.

O gráfico da função inversa é como um espelho do gráfico da função original, refletido na diagonal $y = x$. Isso acontece porque:

- Na função original, temos pontos (x, y)
- Na inversa, trocamos: (y, x)

Exemplo 1:

$$x = \sqrt{y}, (y \geq 0)$$



Note que a **variável livre de f** é a **variável dependente de f^{-1}** , e vice-versa, a **variável dependente de f** é a **variável livre de f^{-1}** . Mantendo as posições dos eixos dos xx e dos yy , as funções f e f^{-1} partilham o mesmo gráfico. Invertendo essas posições, os dois gráficos ficam simétricos relativamente à diagonal $y = x$. Um é a imagem do outro pela reflexão $(x, y) \rightarrow (y, x)$ que fixa a diagonal $y = x$ e troca as posições dos dois eixos.

Agora vejamos novamente o sistema que Miguel está a criar:

- Cada utilizador tem um ID (x)
- O sistema gera um código de acesso ($f(x)$)

Se o sistema for injetivo:

Selecione uma opção:

- ☐ a. Cada ID gera um código diferente e torna-se impossível descobrir o ID original.
- ☐ b. Um ID pode gerar diversos códigos semelhantes e torna-se impossível descobrir o ID original.
- ☒ c. Cada ID gera um código diferente e se alguém souber o código, consegue descobrir o ID original (usando f^{-1}).



Parabéns! O seu raciocínio está perfeito.

Se o sistema for injetivo:

- Cada ID gera um código diferente
- E se alguém souber o código, consegue descobrir o ID original (usando f^{-1})

A sua resposta está correta.

Resposta correta: Cada ID gera um código diferente e se alguém souber o código, consegue descobrir o ID original (usando f^{-1}).

Pergunta 4

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Considere a função $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Esta função é injetiva?

Justifique baseado no que estudou até aqui.

Selecione uma opção:

- ☒ a. **Não**, a função não é injetiva.

Justificativa:

No intervalo de $-1 \leq x \leq 1$, a função é $f(x) = x^2$, que repete valores para diferentes entradas.

- ☒ Parabéns! A sua resposta está absolutamente correta.

No intervalo de $-1 \leq x \leq 1$, a função é $f(x) = x^2$, que repete valores para diferentes entradas.

Por exemplo:

$$f(-0.5) = 0.25$$

$$f(0.5) = 0.25$$

Ou seja, **dois valores diferentes de x deram o mesmo resultado, então não é injetiva.**

- ☐ b. **Sim**, a função é injetiva porque as duas partes da função são contínuas e não se sobrepõem nos intervalos dados.

Justificativa:

A continuidade e o fato de os intervalos serem diferentes garantem que a função seja injetiva.

- ☐ c. **Sim**, a função é injetiva no intervalo de definição dado no gráfico.

Justificativa:

Todas as partes da função têm expressões diferentes e não repete valores.

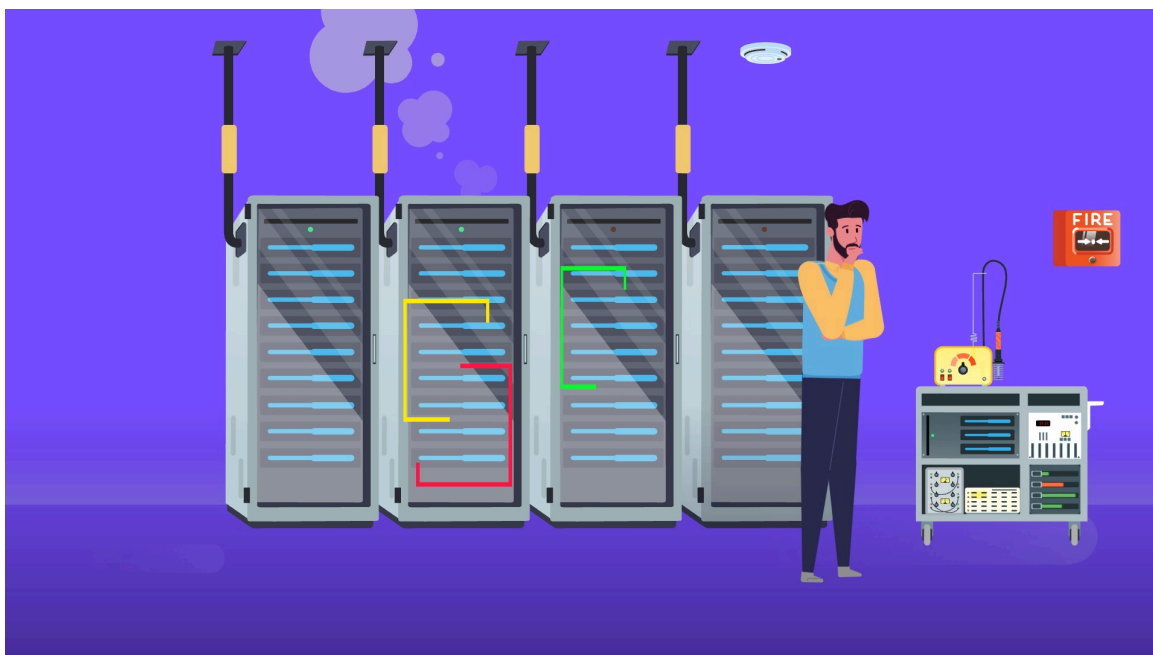
A sua resposta está correta.

Resposta correta: **Não**, a função não é injetiva.

Justificativa:

No intervalo de $-1 \leq x \leq 1$, a função é $f(x) = x^2$, que repete valores para diferentes entradas.

O ar condicionado da escola parou de funcionar e Miguel está preocupado com os servidores. O dia está quente e ele percebeu que a temperatura da sala está sempre a subir. O Miguel tem receio que os servidores fiquem muito aquecidos.



O Miguel lembrou-se das aulas de funções em Análise Infinitesimal. Ele aprendeu que quando uma variável só sobe ou se mantém, ela é como uma função crescente. Nas **funções crescentes, à medida que x aumenta, $f(x)$ também aumenta ou fica igual**.

$$\text{Crescente} \Leftrightarrow \forall x, y \in D, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- O símbolo $\forall$ abrevia uma das expressões: "qualquer que seja" ou "quaisquer que sejam".

Será que há solução para a situação do Miguel?

Vamos aprender mais sobre as funções monótonas?

Imaginemos que o dia estivesse frio e Miguel percebesse que a temperatura das salas está sempre a cair. Essa seria uma função decrescente. Nas **funções decrescentes, à medida que x aumenta, $f(x)$ diminui ou fica igual**.

$$\text{Decrescente} \Leftrightarrow \forall x, y \in D, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Diremos que "crescente" e "decrescente" são os tipos de monotonia que uma função pode ter.

E se os valores subissem sem nunca se repetirem, como os pontos num jogo de videogame? Neste caso, **quando x aumenta e a $f(x)$ aumenta também sem repetir valores**, estamos diante de uma **função estritamente crescente**.

$$\text{Estrit. crescente} \Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- A expressão "estrit." abrevia "estritamente".

E se fosse o contrário? Se **sempre que x aumentasse a $f(x)$ diminuísse sem repetir valores**? Neste caso, temos uma **função estritamente decrescente**, como é o caso quando Miguel formata um computador e está sempre a apagar os ficheiros.

$$\text{Estrit. decrescente} \Leftrightarrow \forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Em resumo:

- **Função Monótona:** pode subir ou descer, mas pode repetir valores.
- **Estritamente monótona:** sobe ou desce sem repetir valores.

Se uma **função é monótona e injetiva** (não repete resultados), então ela é **estritamente monótona**.

E a sua **função inversa** (f^{-1}) também será **estritamente monótona**, no mesmo sentido.

Por exemplo: Se $f(x)$ é estritamente crescente, então $f^{-1}(x)$ também será estritamente crescente.

E uma **função constante** devolve sempre o mesmo valor, não importa o x .

Por exemplo: Se o Miguel configurasse o brilho do monitor para 50%, não muda com o tempo, logo é uma função constante. Curiosamente, uma função constante é considerada:

- Crescente;
- Decrescente;
- Monótona.

Porque ela não muda de direção.

Pergunta **5**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

O Miguel continua a monitorizar a temperatura dos servidores ao longo do dia, usando uma função $f(x)$, onde x é o tempo (em horas) e $f(x)$ é a temperatura (em °C).

1. Variação de uma função

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, e $a, b \in D$ dois pontos no domínio de f .

A **variação** de f no intervalo $[a, b]$ é simplesmente a **diferença entre o valor final e o valor inicial**:

$$V(f; a, b) = f(b) - f(a)$$

Ou seja, no caso do Miguel, a variação é o quanto a temperatura mudou do tempo a até o tempo b .

2. Taxa de variação média

Chama-se taxa de variação média de f no intervalo $[a, b]$ ao quociente

$$\Delta(f; a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{V(f; a, b)}{b - a}$$

que mede a variação dos valores de f relativa à variação dos argumentos no intervalo $[a, b]$. Em outras palavras, é a **variação dividida pelo tempo decorrido**. Isto responde à pergunta: "Em média, quanto a temperatura mudou por cada unidade de tempo?"

- Se $f(x)$ for a temperatura, $\Delta(f; a, b)$ é a variação média da temperatura por hora.
- Se $f(x)$ for a distância percorrida, $\Delta(f; a, b)$ é a velocidade média.

3. Interpretação geométrica

No gráfico da função $f(x)$, a taxa de variação média é o declive da reta secante que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Se a variável x representar o tempo, e a função f a evolução temporal de uma determinada quantidade, então a taxa de variação média $\Delta(f; a, b)$ é igual à velocidade média da quantidade $y = f(x)$ no intervalo de tempo $[a, b]$.

Vamos praticar um pouco?

Se, às 10h, o servidor da escola onde Miguel trabalha estava a 30°C ($f(10) = 30$) e, às 14h, estava a 38°C ($f(14) = 38$), temos a seguinte variação:

- Variação: $f(14) - f(10) = 38 - 30 = 8$

Calcule a taxa de variação média da temperatura do servidor:

$$\Delta(f; a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{V(f; a, b)}{b - a}$$

Selecione uma opção:

- ☒ a. $f(14) - f(10) / 14 - 10 = 38 - 30 / 14 - 10 = 8 / 4 = 2$

A taxa de variação média é de 2 graus por hora, ou seja, em média, a temperatura aumentou 2°C por hora nesse intervalo.

- ☐ b. $f(10) - f(14) / 14 - 10 = 30 - 38 / 14 - 10 = -8 / 4 = -2$

A taxa de variação média é de -2 graus por hora, ou seja, em média, a temperatura diminuiu 2°C por hora nesse intervalo.

✔ Parabéns! Faça sempre o cálculo para aprender o raciocínio matemático correto.

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $f(14) - f(10) / 14 - 10 = 38 - 30 / 14 - 10 = 8 / 4 = 2$

A taxa de variação média é de 2 graus por hora, ou seja, em média, a temperatura aumentou 2°C por hora nesse intervalo.

Pergunta 6

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Até agora, falámos da taxa de variação média — que mede a variação “em média” entre dois pontos. Mas e se quisermos saber **como a função está a variar exatamente num instante**?

1. Taxa de variação instantânea

Chama-se **taxa de variação instantânea, ou contínua**, de f em $x = a$ ao limite das taxas de variação médias $\Delta(f; a, a + h)$ quando h tende para zero. Em outras palavras, é o que acontece quando calculamos a taxa de variação média em intervalos cada vez menores, aproximando b de a . Ou seja, é o limite:

$$\Delta(f; a) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta(f; a, a + h)$$

Isto é, vemos como $f(x)$ muda quando x muda um bocadinho a partir de a .

- Se $h > 0$: estamos a olhar para a direita de a .
- Se $h < 0$: estamos a olhar para a esquerda de a .

Por exemplo, se $f(x)$ representa a posição de um objeto ao longo do tempo, a taxa de variação instantânea em $x = a$ é a **velocidade instantânea nesse instante**.

A taxa de variação contínua $\Delta(f; a)$ é habitualmente conhecida como a **derivada da função** f no ponto $x = a$, e denotada por:

$$f'(a) = \Delta(f; a)$$

Geometricamente, a taxa de variação contínua $\Delta(f; a)$ é o **declive da recta tangente** ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

2. Taxa relativa de variação média

Às vezes, queremos saber **quanto a função varia em relação ao seu próprio valor inicial**. Para isso, usamos a **taxa relativa de variação média**:

$$\Xi(f; a, b) = \frac{\Delta(f; a, b)}{f(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)f(a)}$$

Ela mede a variação média “por unidade do valor inicial”.

Exemplo 1 *Exemplos de taxas relativas.*

Quando se fala de uma taxa de juros de 5% ao ano, que uma certa população tem uma taxa de crescimento demográfico de 0.04% ao ano, ou ainda quando se diz que a taxa de desintegração do carbono-14 é de -0.0124% ao ano, estão a referir-se taxas relativas de variação média em intervalos de tempo de um ano. Sejam $C(x)$, $P(x)$ e $Q(x)$ funções de um tempo x , medido em anos, que representam respectivamente um capital investido, a dimensão de uma população, e a quantidade de carbono-14 presente numa certa amostra. Então as taxas acima expressas significam que

$$\Xi(C; a, a + 1) = \frac{C(a + 1) - C(a)}{C(a)} = \frac{5}{100}.$$

Ao fim de um ano, o capital investido rende 0.05 euros de juros por cada euro de capital inicialmente investido.

$$\Xi(P; a, a + 1) = \frac{P(a + 1) - P(a)}{P(a)} = \frac{0.04}{100}.$$

A taxa de crescimento da população é de 0.0004 novos indivíduos por ano e por habitante.

$$\Xi(Q; a, a + 1) = \frac{Q(a + 1) - Q(a)}{Q(a)} = -\frac{0.0124}{100}.$$

Por ano, e por cada grama da amostra, desintegram-se $0.000124g$ de carbono-14.

3. Taxa relativa de variação instantânea ou contínua

Finalmente, chama-se **taxa relativa de variação contínua** de f em $x = a$ ao quociente

$$\Xi(f; a) = \frac{\Delta(f; a)}{f(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)},$$

que é a taxa de variação contínua de f em $x = a$, relativa ao valor $f(a)$. Ou seja, é a derivada dividida pelo valor da função naquele instante.

Em resumo:

Taxa de variação média	Quanto a função muda, em média, por unidade de x .
Taxa de variação instantânea (derivada)	Quanto a função está a mudar exatamente num ponto.
Taxa relativa	Quanto a função muda em relação ao seu valor inicial.
Taxa relativa instantânea	Quanto a função está a mudar, naquele instante, em relação ao seu valor.

Agora vamos praticar:

Considere a função $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Calcule a variação de f no intervalo $[0, 2]$.

Selecione uma opção:

- ☒ a. $V(f; 0, 2) = f(2) - f(0) = (2 \times 2 - 1) - (0^2) = (4 - 1) - 0 = 3$  **Correto!**
Para calcular a variação, basta subtrair o valor da função no extremo direito pelo valor no extremo esquerdo do intervalo.
Como $0 \in [-1, 1]$, usa-se $f(0) = 0^2 = 0$.
Como $2 \in (1, 2]$, usa-se $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$.
- ☐ b. $V(f; 0, 2) = f(2) - f(0) = (2^2) - (0^2) = 4 - 0 = 4$

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $V(f; 0, 2) = f(2) - f(0) = (2 \times 2 - 1) - (0^2) = (4 - 1) - 0 = 3$

Pergunta **7**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Agora, **calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[-1, 2]$.**

Selecione uma opção:

- ☒ a. Após fazer o seu cálculo, a resposta correta é $\frac{2}{3}$.  **Correto!** A taxa de variação média é calculada pela fórmula:
$$\Delta(f; a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{V(f; a, b)}{b - a},$$

Logo,
$$\Delta(f; -1, 2) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(2 \cdot 2 - 1) - ((-1)^2)}{3} = \frac{(4 - 1) - 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Aqui, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ (porque $-1 \in [-1, 1]$) e $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ (porque $2 \in (1, 2]$). A diferença é $3 - 1 = 2$, e o intervalo tem comprimento 3, logo a taxa é $\frac{2}{3}$.
- ☐ b. Após fazer o seu cálculo, a resposta correta é $\frac{5}{3}$.

A sua resposta está correta.

Resposta correta: Após fazer o seu cálculo, a resposta correta é $\frac{2}{3}$.

Vamos agora aprender algumas classes de funções.

1. Funções Lineares

Chama-se função linear a uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = mx + b,$$

onde m e b são parâmetros numéricos. As funções lineares têm taxa de variação constante. Esta afirmação refere-se às taxas absolutas, tanto a média como a contínua. Se $f(x) = mx + b$ então

$$V(f; a, a+h) = mh \quad \text{e} \quad \Delta(f; a, a+h) = m = \Delta(f; a).$$

Na realidade, as funções lineares podem ser caracterizadas como as funções que têm taxa de variação constante.

Vamos imaginar que o Miguel está a configurar um serviço de impressão na escola. Cada página custa 0,05€ e há uma taxa fixa de 1€ por utilização:

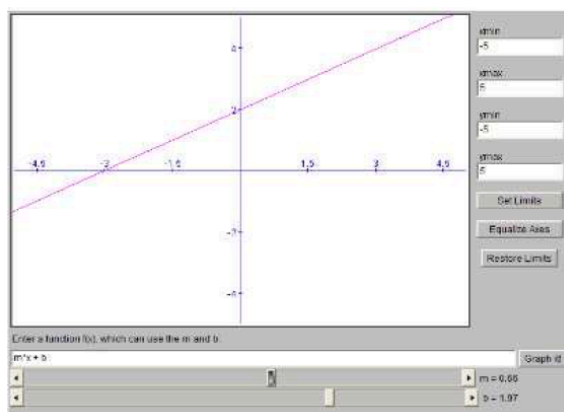
$$f(x) = 0,05x + 1$$

- x : número de páginas
- $f(x)$: custo total

Se um estudante imprimir 100 páginas, vai pagar:

$$f(100) = 0,05 \cdot 100 + 1 = 5 + 1 = 6 \text{ €}$$

O gráfico de uma função linear é uma recta com declive igual a m que corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$.



2. Funções Quadráticas

Chama-se função quadrática a uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

onde $A \neq 0$, B e C são parâmetros numéricos.

Vamos supor que o Miguel está a medir o tempo de execução de um algoritmo de ordenação quadrática (como o Bubble Sort), onde o tempo cresce com o quadrado do número de elementos:

$$T(n) = 0,01n^2 + 0,5n + 2$$

- n : número de elementos a ordenar
- $T(n)$: tempo em milissegundos

Para **10 elementos**, teremos:

$$T(10) = 0,01 \cdot 100 + 0,5 \cdot 10 + 2 = 1 + 5 + 2 = \mathbf{8 \text{ ms}}$$

Para **50 elementos**:

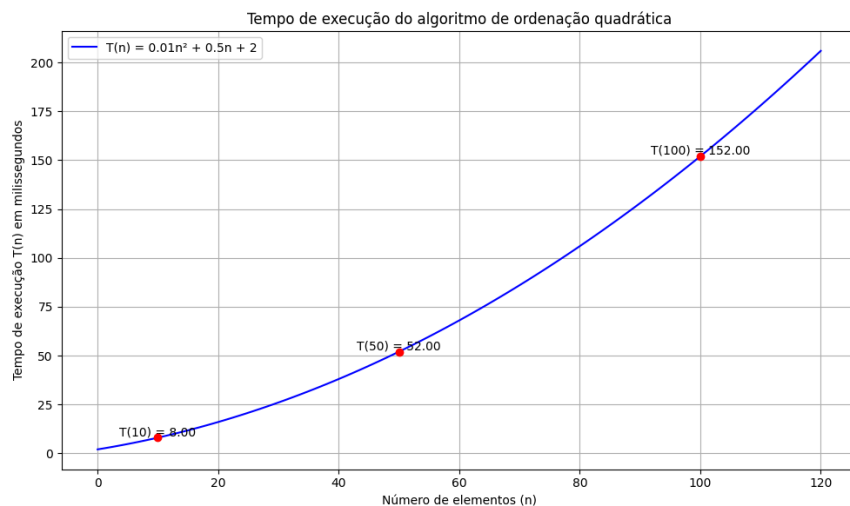
$$T(50) = 0,01 \cdot 2500 + 0,5 \cdot 50 + 2 = 25 + 25 + 2 = \mathbf{52 \text{ ms}}$$

Para **100 elementos**:

$$T(100) = 0,01 \cdot 10000 + 0,5 \cdot 100 + 2 = 100 + 50 + 2 = \mathbf{152 \text{ ms}}$$

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com direção principal paralela ao eixo dos y , e concavidade virada para cima se $A > 0$, ou virada para baixo se $A < 0$. O valor absoluto do parâmetro A controla a abertura da parábola: quanto maior fôr, mais fechada será a parábola. O parâmetro C é a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas: $(0, C)$. O parâmetro B é o declive da recta tangente à parábola no ponto de intersecção $(0, C)$.

Para o exemplo do Miguel, temos o gráfico do tempo de execução, que mostra como o tempo cresce com o número de elementos:



Este tipo de análise ajuda o Miguel a prever o desempenho de algoritmos em diferentes situações.

O vértice da parábola é o ponto $(-\frac{B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A})$, cuja abscissa $x = -\frac{B}{2A}$ é obtida resolvendo a equação $f'(x) = 2Ax + B = 0$, e cuja ordenada do vértice é obtida calculando $f(-\frac{B}{2A}) = C - \frac{B^2}{4A}$.

Vamos ver outro exemplo?

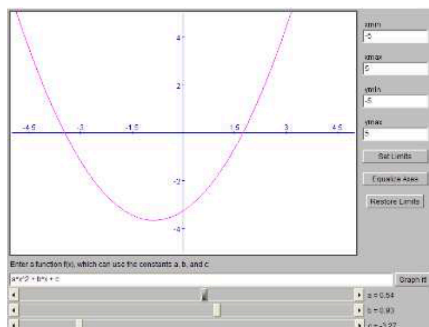
Calcule as taxas de variação absolutas da função quadrática $f(x) = x^2$.

$$V(f; a, a+h) = (a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2,$$

$$\Delta(f; a, a+h) = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h,$$

$$\Delta(f; a) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

O gráfico fica assim:



Pergunta 8

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

3. Funções cúbicas

Chama-se função cúbica a uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

onde $A \neq 0$, B , C e D são parâmetros numéricos.

Vamos imaginar que Miguel está a estudar o tempo de execução de um algoritmo com complexidade cúbica, como o algoritmo de multiplicação de matrizes:

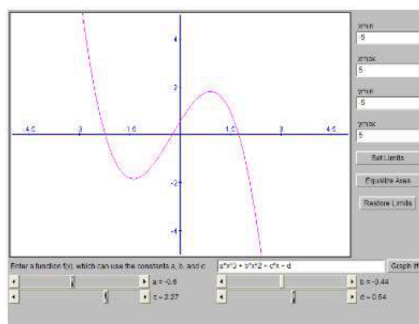
$$T(n) = 0,001 n^3 + 0,1 n^2 + 2$$

n : número de elementos (dimensão da matriz)

$T(n)$: tempo de execução em milissegundos

O gráfico desta função é uma curva, a que também se chama cúbica. Toda a cúbica tem sempre um único ponto de inflexão, que é um ponto de simetria da curva. A cúbica é invariante por uma rotação de 180° centrada no seu ponto de inflexão. Uma função cúbica, ou é estritamente monótona, ou então tem 3 intervalos de monotonia, assumindo um máximo e um mínimo locais, nos extremos do intervalo de monotonia intercalada.

Os quatro parâmetros A , B , C e D estão relacionados com o comportamento da cúbica em $x = 0$. Qual o significado geométrico dos parâmetros D e C ? E do parâmetro A ? A aplicação na imagem seguinte permite-lhe manipular uma cúbica controlando os parâmetros A , B , C e D .



As características desta função são:

- O gráfico pode ter dois pontos de inflexão.
- O crescimento é mais rápido que o quadrático.
- A derivada é: $f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

Calculamos agora as taxas de variação absolutas da cúbica $f(x) = x^3$.

$$V(f; a, a+h) = (a+h)^3 - a^3 = 3a^2h + 3ah^2 + h^3,$$

$$\Delta(f; a, a+h) = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2,$$

$$\Delta(f; a) = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2.$$

Vamos calcular?

No caso do Miguel, calcule o tempo de execução de um algoritmo com complexidade cúbica a partir da função dada e diga se os valores calculados por Miguel para 10, 50 e 100 elementos são verdadeiros ou falsos.

$$T(n) = 0,001 n^3 + 0,1 n^2 + 2$$

Para 10 elementos, Miguel encontrou **13 milissegundos**.

Para 50 elementos, **301 milissegundos**.

Para 100 elementos, **2002 milissegundos**.

Estes resultados são verdadeiros ou falsos?

☐ Verdadeiro

☒ Falso ✓

Resposta correta!

- Miguel realmente encontrou **13 milissegundos** para 10 elementos:

$$T(10) = 0,001 (10)^3 + 0,1 (10)^2 + 2 = 0,001 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 100 + 2 = 1 + 10 + 2 = 13 \text{ milissegundos}$$

- E para 100 elementos, Miguel encontrou **2002 milissegundos**:

$$T(100) = 0,001 (100)^3 + 0,1 (100)^2 + 2 = 0,001 \cdot 1.000.000 + 0,1 \cdot 10.000 + 2 = 1.000 + 1.000 + 2 = 2002 \text{ milissegundos}$$

- Entretanto, para 50 elementos, o resultado correto é **377 milissegundos**, ao invés de 301. Veja:

$$T(50) = 0,001 (50)^3 + 0,1 (50)^2 + 2 = 0,001 \cdot 125.000 + 0,1 \cdot 2.500 + 2 = 125 + 250 + 2 = \mathbf{377 \text{ milissegundos.}}$$

Este exemplo ajuda o Miguel a perceber por que algoritmos cúbicos são menos eficientes para grandes volumes de dados.

Resposta correta: Falso

Pergunta 9

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

4. Funções exponenciais

Vamos imaginar que Miguel está a analisar o crescimento de um vírus informático que se propaga exponencialmente:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Sendo:

t : tempo em horas

$f(t)$: número de computadores infetados

Temos:

$$f(t) = 2^t$$

Para cada parâmetro $b > 0$ chama-se exponencial de base b à função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{a x}, \text{ onde } a = \ln b.$$

Recorde que, a exponencial, qualquer que seja a base considerada, satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

1. $b^0 = 1$,
2. $b^{x+y} = b^x b^y$,
3. $b^{-x} = 1/b^x$.

Mais geralmente, é habitual chamar-se de função exponencial qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha a forma

$$f(x) = c b^x = c e^{a x} \quad \text{com} \quad a = \ln b.$$

As características destas funções são:

- Crescimento muito rápido;
- Sempre positiva;
- Derivada: proporcional à própria função.

Vamos calcular agora as taxas de variação, médias e contínuas, absolutas e relativas, destas funções.

$$V(f; x, x+h) = c b^{x+h} - c b^x = c b^x (b^h - 1),$$

$$\Delta(f; x, x+h) = \frac{c b^x (b^h - 1)}{h} = c b^x \frac{b^h - 1}{h},$$

$$\Delta(f; x) = \lim_{h \rightarrow 0} c b^x \frac{b^h - 1}{h} = c b^x \ln b,$$

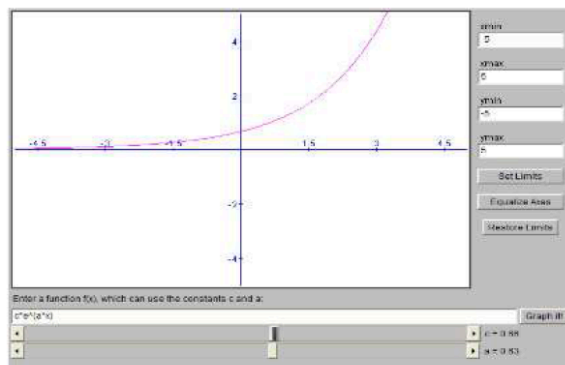
$$\Xi(f; x, x+h) = \frac{c b^x (b^h - 1)}{h c b^x} = \frac{b^h - 1}{h},$$

$$\Xi(f; x) = \frac{c b^x \ln b}{c b^x} = \ln b.$$

Observe que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a \frac{e^{a h} - 1}{a h} = a = \ln b.$$

Logo, toda a função exponencial tem taxa relativa de variação instantânea que é constante, igual ao logaritmo natural da sua base. Mas tem também taxa relativa de variação média que não depende do ponto x , mas apenas da amplitude h do intervalo em que é calculada. Pode-se mostrar que qualquer uma destas propriedades caracteriza completamente as funções exponenciais. Elas são as únicas funções com taxa relativa de variação contínua constante. São também as únicas funções cuja taxa relativa de variação média depende da amplitude do intervalo, mas não do ponto em que é calculada. A imagem seguinte mostra uma aplicação para manipular o gráfico de uma função exponencial $f(x) = c e^{a x}$, através dos parâmetros c e a .



5. Funções logarítmo

Chama-se função logarítmo de base b à inversa da função exponencial com a mesma base. Assim, o logarítmo de base b é a função

$$\log_b :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \text{ caracterizada por: } y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

O logarítmo, qualquer que seja a base, satisfaz as propriedades fundamentais:

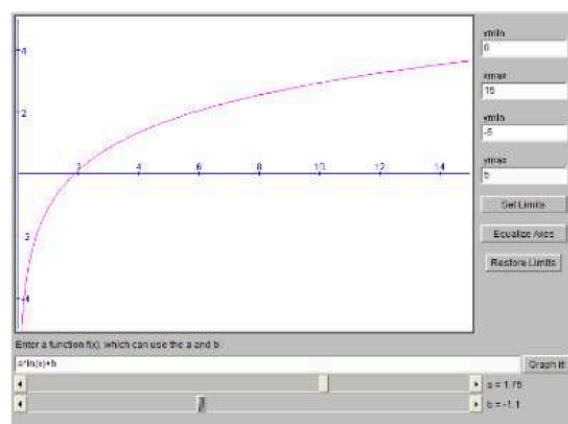
1. $\log_b(1) = 0$,
2. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$,
3. $\log_b(1/x) = -\log_b x$.

Mais geralmente, é habitual dizer-se que é uma função logarítmo qualquer função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que seja da forma

$$f(x) = a \ln x + b.$$

É fácil verificar que $f(x)$ é a inversa da função exponencial $g(x) = C e^{Ax}$, com $C = e^{-b/a}$ e $A = 1/a$.

Na aplicação seguinte pode manipular o gráfico de uma função logarítmo, controlando os parâmetros a e b .



Vamos supor que o Miguel está a estudar a complexidade de um algoritmo de pesquisa binária, modelado pela função:

$$T(n) = \log_2(n)$$

n : número de elementos

$T(n)$: número de comparações

Calcule os valores para o número de comparações:

Para 10 elementos: $T(10) \approx$ ☒ comparações

Para 50 elementos: $T(50) \approx$ ☒ comparações

Para 100 elementos: $T(100) \approx$ ☒ comparações

A sua resposta está correta.

A pesquisa binária é um algoritmo eficiente para encontrar um elemento numa lista ordenada. Em vez de verificar cada item um por um, ela divide a lista ao meio a cada passo, eliminando metade dos elementos.

A complexidade desse algoritmo é modelada pela função:

$$T(n) = \log_2(n)$$

Onde:

n : é o número de elementos na lista.

$T(n)$: é o número máximo de comparações necessárias para encontrar o elemento (ou concluir que ele não está na lista).

Logo,

Para **10 elementos**:

$$T(10) = \log_2(10) = 3,3219280949 \approx \mathbf{3,32}$$

- No máximo, **3 a 4 comparações**.

Para **50 elementos**:

$$T(50) = \log_2(50) = 5,6438561898 \approx \mathbf{5,64}$$

- No máximo, **5 a 6 comparações**.

Para **100 elementos**:

$$T(100) = \log_2(100) = 6,6438561898 \approx \mathbf{6,64}$$

No máximo, **6 a 7 comparações**.

O que Miguel pode concluir?

- A pesquisa binária cresce muito lentamente com o tamanho da lista.
- Mesmo com 100 elementos, são necessárias apenas cerca de 7 comparações.
- Isso mostra como o algoritmo é muito eficiente, especialmente em listas grandes.

Resposta correta:

4. Funções exponenciais

Vamos imaginar que Miguel está a analisar o crescimento de um vírus informático que se propaga exponencialmente:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Sendo:

t : tempo em horas

$f(t)$: número de computadores infectados

Temos:

$$f(t) = 2^t$$

Para cada parâmetro $b > 0$ chama-se exponencial de base b à função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{a x}, \text{ onde } a = \ln b.$$

Recorde que, a exponencial, qualquer que seja a base considerada, satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

1. $b^0 = 1$,
2. $b^{x+y} = b^x b^y$,
3. $b^{-x} = 1/b^x$.

Mais geralmente, é habitual chamar-se de função exponencial qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha a forma

$$f(x) = c b^x = c e^{a x} \quad \text{com} \quad a = \ln b.$$

As características destas funções são:

- Crescimento muito rápido;
- Sempre positiva;
- Derivada: proporcional à própria função.

Vamos calcular agora as taxas de variação, médias e contínuas, absolutas e relativas, destas funções.

$$V(f; x, x+h) = c b^{x+h} - c b^x = c b^x (b^h - 1),$$

$$\Delta(f; x, x+h) = \frac{c b^x (b^h - 1)}{h} = c b^x \frac{b^h - 1}{h},$$

$$\Delta(f; x) = \lim_{h \rightarrow 0} c b^x \frac{b^h - 1}{h} = c b^x \ln b,$$

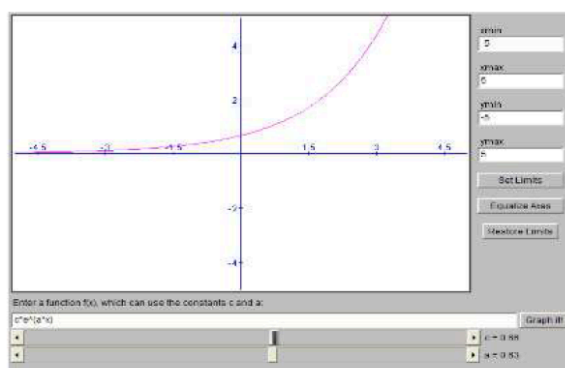
$$\Xi(f; x, x+h) = \frac{c b^x (b^h - 1)}{h c b^x} = \frac{b^h - 1}{h},$$

$$\Xi(f; x) = \frac{c b^x \ln b}{c b^x} = \ln b.$$

Observe que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a \frac{e^{ah} - 1}{ah} = a = \ln b.$$

Logo, toda a função exponencial tem taxa relativa de variação instantânea que é constante, igual ao logaritmo natural da sua base. Mas tem também taxa relativa de variação média que não depende do ponto x , mas apenas da amplitude h do intervalo em que é calculada. Pode-se mostrar que qualquer uma destas propriedades caracteriza completamente as funções exponenciais. Elas são as únicas funções com taxa relativa de variação contínua constante. São também as únicas funções cuja taxa relativa de variação média depende da amplitude do intervalo, mas não do ponto em que é calculada. A imagem seguinte mostra uma aplicação para manipular o gráfico de uma função exponencial $f(x) = c e^{ax}$, através dos parâmetros c e a .



5. Funções logaritmo

Chama-se função logaritmo de base b à inversa da função exponencial com a mesma base. Assim, o logaritmo de base b é a função

$$\log_b :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \text{ caracterizada por: } y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

O logaritmo, qualquer que seja a base, satisfaz as propriedades fundamentais:

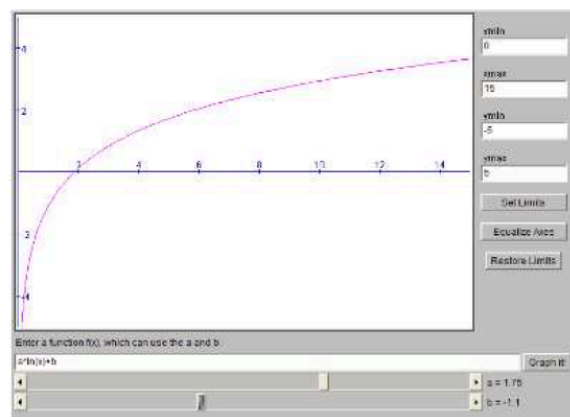
1. $\log_b(1) = 0$,
2. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$,
3. $\log_b(1/x) = -\log_b x$.

Mais geralmente, é habitual dizer-se que é uma função logaritmo qualquer função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que seja da forma

$$f(x) = a \ln x + b.$$

É fácil verificar que $f(x)$ é a inversa da função exponencial $g(x) = C e^{Ax}$, com $C = e^{-b/a}$ e $A = 1/a$.

Na aplicação seguinte pode manipular o gráfico de uma função logaritmo, controlando os parâmetros a e b .



Vamos supor que o Miguel está a estudar a complexidade de um algoritmo de pesquisa binária, modelado pela função:

$$T(n) = \log_2(n)$$

n : número de elementos

$T(n)$: número de comparações

Calcule os valores para o número de comparações:

Para 10 elementos: $T(10) \approx [3,32]$ comparações

Para 50 elementos: $T(50) \approx [5,64]$ comparações

Para 100 elementos: $T(100) \approx [6,64]$ comparações

6. Funções Lineares-Fracçãoárias

Uma função da forma

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

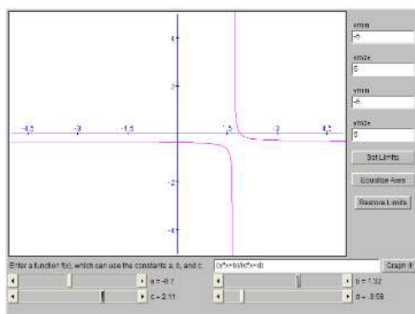
Onde A, B, C e D são parâmetros numéricos tais que $AD - BC \neq 0$, diz-se uma fracção linear, ou uma função linear-fracçãoária. Observe que, se $AD - BC = 0$ então $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e neste caso a função acima é constante. Com efeito tem-se

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D} = \frac{B}{D} \cdot \frac{\frac{A}{B}x+1}{\frac{C}{D}x+1} = \frac{B}{D}.$$

Quando $C = 0$, a fracção linear é uma função linear:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{D} = \frac{A}{D}x + \frac{B}{D}.$$

Caso contrário, se $C \neq 0$ então o gráfico da fracção linear é uma hipérbole com assíntotas paralelas aos eixos coordenados. Nomeadamente, $x = -\frac{D}{C}$ e $y = \frac{A}{C}$ são assíntotas, vertical e horizontal respectivamente, ao gráfico da função $f(x)$.



Vamos aplicar ao contexto do Miguel. Imaginemos que o Miguel está a configurar um sistema de balanceamento de carga onde o tempo de resposta depende da razão entre pedidos e capacidade. Aplicamos a função:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$$

Onde:

x : número de pedidos por segundo

$f(x)$: tempo médio de resposta.

Temos como solução:

Para **1 pedido/segundo**:

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

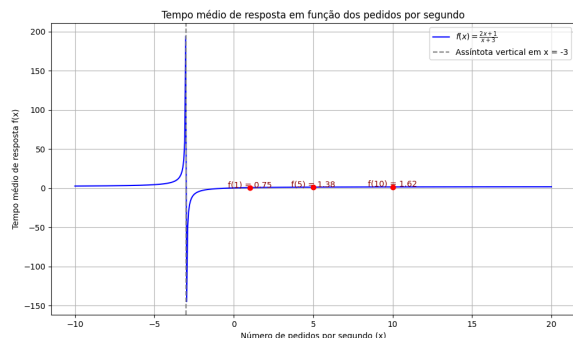
Para **5 pedidos/segundo**:

$$f(5) = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5 + 3} = \frac{11}{8} = 1,375$$

Para **10 pedidos/segundo**:

$$f(10) = \frac{2 \cdot 10 + 1}{10 + 3} = \frac{21}{13} = 1,615$$

Este gráfico mostra como o tempo médio de resposta varia com o número de pedidos. Repare na assíntota vertical em $x = -3$, onde a função não está definida:



Este tipo de função ajuda o Miguel a prever o comportamento do sistema sob diferentes cargas.

As características desta função são:

- Pode ter assíntotas verticais e horizontais;
- Não é definida onde o denominador é zero;
- Derivada mais complexa (regra do quociente).

Calculam-se a seguir as taxa de variação absolutas da fracção linear $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

$$V(f; a, a+h) = \frac{a+h}{1+a+h} - \frac{a}{1+a} = \frac{h}{(1+a)(1+a+h)},$$

$$\Delta(f; a, a+h) = \frac{\frac{h}{(1+a)(1+a+h)}}{h} = \frac{h}{(1+a)(1+a+h)},$$

$$\Delta(f; a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(1+a)(1+a+h)} = \frac{1}{(1+a)^2}$$

Pergunta **10**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Considere a seguinte função

$$g(x) = \sqrt{x+2}.$$

Indique o **domínio** e o **contradomínio** da função g .

Selecione uma opção:

- ☐ a. Para que a raiz quadrada esteja definida nos reais, o radicando (o que está dentro da raiz) pode ser menor ou igual a zero:

$$\text{Se } x = -3$$

$$\text{Então } g(-3) = \sqrt{-3+2} = \sqrt{-1}$$

Portanto, o **domínio** é: $[\sqrt{-1}, +\infty[$

E o **contradomínio** é: $\mathbb{R}$

- ☒ b. Para que a raiz quadrada esteja definida nos reais, o radicando (o que está dentro da raiz) deve ser maior ou igual a zero:

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

Portanto, o **domínio** é: $[-2, +\infty[$

E o **contradomínio** é: $[0, +\infty[$

- ✔ Muito bem! Considerou corretamente a condição de existência da raiz quadrada e identificou que a imagem da função é composta apenas por valores reais não-negativos.

Para calcular o contradomínio, sabemos que a função $g(x) = \sqrt{x} + 2$ retorna a raiz quadrada de um número não-negativo, e sabemos que:

A raiz quadrada de um número real não-negativo é sempre não-negativa.

Vamos analisar alguns valores:

- Se $x = -2$, então $g(-2) = \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0$
- Se $x = 0$, então $g(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2} \approx 1.41$
- Se $x = 2$, então $g(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
- À medida que $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$

A sua resposta está correta.

Resposta correta: Para que a raiz quadrada esteja definida nos reais, o radicando (o que está dentro da raiz) deve ser maior ou igual a zero:

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

Portanto, o **domínio** é: $[-2, +\infty[$

E o **contradomínio** é: $[0, +\infty[$

Pergunta **11**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Caracterize a **função inversa** da função: $g(x) = \sqrt{x+2}$

Selecione uma opção:

☐ a. $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}$

☐ b. $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

☒ c. $g^{-1}(x) = x^2 - 2$ ✔ Excelente resposta!

Para encontrar a função inversa, seguimos estes passos:

1. Trocar $g(x)$ por y :

$$y = \sqrt{x+2}$$

2. Isolar x em função de y :

- Eliminamos a raiz:

$$y^2 = x + 2$$

- Subtraímos 2:

$$x = y^2 - 2$$

3. Trocar y por x para obter a inversa:

$$g^{-1}(x) = x^2 - 2$$

A inversa é uma **função quadrática restrita** ao domínio não-negativo, o que garante que ela seja injetiva nesse intervalo e, portanto, tenha inversa.

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $g^{-1}(x) = x^2 - 2$