UAb

FÍSICA I | 21049

ORIENTAÇÕES DE RESPOSTA

EFOLIO A

Ano letivo: 2020-21

Versão: 28-abr-21

Q1

(a) Para obter a rapidez após o ressalto basta resolver as equações para a posição de projétil em ordem a v_0. Usando o referencial da figura temos:

$$\begin{array}{c} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = v_0\cos(55^o)\,t \\ y = 1{,}4 + v_0\,\mathrm{sen}(55^o)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0{,}5736v_0t \\ y = 1{,}4 + 0{,}8192v_0t - 4{,}9t^2 \end{array}$$

Substituindo dados para o instante de chegada ao solo tiramos v_0:

$$\begin{array}{c} 30 = 0{,}5736v_0t \\ 0 = 1{,}4 + 0{,}8192v_0t - 4{,}9t^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} v_0t = 52{,}30 \\ 0 = 1{,}4 + 0{,}8192 \cdot 52{,}30 - 4{,}9t^2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} v_0 = \frac{52{,}30}{3{,}005} = 17{,}40 \quad \left(17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\ t = \pm\sqrt{\frac{44{,}24}{4{,}9}} = \pm 3{,}005\ \mathrm{s} \end{array}$$

Em paralelo, sabemos também o tempo de voo. Descartámos a solução não-física t = -3,0 s que corresponde ao mesmo trajeto com o tempo invertido, i.e. projétil lançado do solo a ir de encontro ao taco.

(b) Sabendo as velocidades antes e depois do ressalto no taco podemos obter o impulso por kg a partir do teorema de impulso-momento, $\vec{I} = \Delta\vec{p}$. Como 90 km/h são 25 m/s temos, no mesmo referencial e atendendo à natureza vetorial da velocidade:

Antes: $\vec{v}_1 = -25\cos(10^o)\,\hat{\mathbf{i}} - 25\,\mathrm{sen}(10^o)\,\hat{\mathbf{j}}$

Depois: $\vec{v}_2 = 17{,}40\cos(55^o)\,\hat{\mathbf{i}} + 17{,}40\,\mathrm{sen}(55^o)\,\hat{\mathbf{j}}$

o que leva a

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \Leftrightarrow \vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \rightarrow \vec{I}$$
$$= m[(17{,}40\cos(55^o)\,\hat{\mathbf{i}} + 17{,}40\,\mathrm{sen}(55^o)\,\hat{\mathbf{j}}) - (-25\cos(10^o)\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$- 25\,\mathrm{sen}(10^o)\,\hat{\mathbf{j}})] \Leftrightarrow \frac{\vec{I}}{m}$$
$$= (17{,}40 \cdot 0{,}5736 + 25 \cdot 0{,}9848)\hat{\mathbf{i}} + (17{,}40 \cdot 0{,}8192 + 25 \cdot 0{,}1736)\hat{\mathbf{j}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\vec{I}}{m} = 34{,}6\hat{\mathbf{i}} + 18{,}6\hat{\mathbf{j}}$$

Ou seja, a 2 AS a bola recebe um impulso horizontal de 35 N.s x e vertical de 19 N.s, por cada kg de massa.

(c) A velocidade média é $\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Já temos o tempo calculado da alínea (a). O vetor deslocamento é simplesmente $\Delta\vec{r} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{i}} - 1{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{j}}$ e vem, a 2 AS,

$$\vec{v}_{med} = 9{,}981\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{i}} - 0{,}4659\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{j}} \quad \rightarrow \quad v_{med} = \sqrt{9{,}981^2 + (-0{,}4659)^2}$$
$$= 9{,}992\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$$

Já a rapidez média requer mais trabalho. Esta é, por definição, $s_{med} = \frac{\mathrm{dist.}}{\Delta t}$. Há, pois, que calcular a distância percorrida através do integral de comprimento de arco, s. Para aplicar a fórmula temos de escrever a trajetória como $y(x)$. Isto faz-se eliminando o tempo das equações paramétricas da trajetória. Substituindo o valor v_0 nestas temos

$$\begin{matrix} x = 9{,}981t \\ y = 1{,}4 + 14{,}24t - 4{,}9t^2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t = \frac{x}{9{,}981} \\ y = 1{,}4 + 14{,}24 \cdot \frac{x}{9{,}981} - 4{,}9 \cdot \left(\frac{x}{9{,}981}\right)^2 \end{matrix} \rightarrow \quad y(x)$$
$$= 1{,}4 + 1{,}423x - 0{,}04919x^2$$

A derivada é $\frac{dy}{dx} = 1{,}423 - 0{,}09838x$ e o integral de comprimento é então

$$\text{dist.} = s = \int_0^{30} \sqrt{1 + (1{,}423 - 0{,}09838x)^2}\,dx$$

Há várias formas de resolver este integral. Uma é fazer a mudança de variável $z = 1{,}423 - 0{,}09838x,\ dz = -0{,}09838dx$, que leva a

$$\int_{1{,}423}^{-1{,}5284} \sqrt{1+z^2}\,\frac{1}{-0{,}09838}\,dz \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}09838}\int_{-1{,}5284}^{1{,}423} \sqrt{1+z^2}\,dz$$

$$\Leftrightarrow 10{,}16 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2} + \operatorname{argsh} z\right)\right]_{-1{,}5284}^{1{,}423}$$

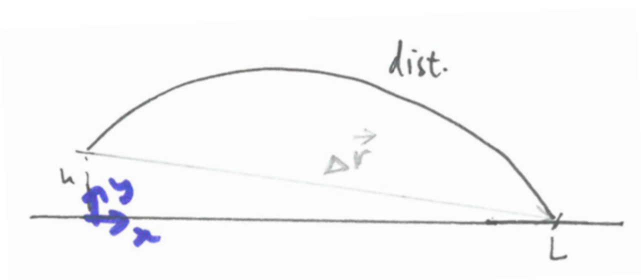
$$\Leftrightarrow 5{,}080 \cdot \left[\left(1{,}423 \cdot \sqrt{1+1{,}423^2} + 1{,}151\right) - \left(-1{,}5284 \cdot \sqrt{1+(-1{,}5284)^2} - 1{,}210\right)\right] = 38{,}75$$

(valores de argsh z obtidos de wolframalpha.com)

Sendo um integral definido não é necessário reverter a mudança de variável: o valor encontrado é o valor da distância percorrida e temos, finalmente,

$$s_{med} = \frac{\text{dist.}}{\Delta t} \rightarrow s_{med} = \frac{38{,}75}{3{,}005} = 12{,}90\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

Este valor é, como se esperava, superior ao módulo da velocidade média, uma vez que o comprimento de arco da trajetória é maior do que o módulo do deslocamento, uma linha reta. C.f. figura abaixo:



Q2

(a) O sistema massa-mola é conservativo e podemos usar a conservação de mecânica na fase de expansão da mola. Designando '1' e '2' como respetivamente o início da compressão e ponto de desprendimento temos

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_{m1} = E_{m2} \rightarrow E_{c1} + E_{p1,elast} = E_{c2} + E_{p2,elast} \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3700x^2 = \frac{1}{2}0{,}450 \cdot 2{,}8^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{0{,}450 \cdot 2{,}8^2}{3700}}$$

$$= 0{,}03088 \text{ m} \quad (3{,}1 \text{ cm})$$

(b) Há várias formas de resolver esta alínea. Aqui vamos usar o corolário do teorema de trabalho-energia, $\Delta E_m = W_{NC}$. Neste caso a única força não-conservativa a atuar é o atrito estático, f_k. Designando por '3' o ponto em que o bloco para temos, aplicando o dito corolário e fazendo a origem do potencial gravítico em '2' (h_2 = 0),

$$\Delta E_m = W_{NC} \rightarrow E_{c3} + E_{pg3} - \left(E_{c2} + E_{pg2}\right) = W_{f_k} \Leftrightarrow 0 + mgh_3 - \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + 0\right)$$

$$= \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{r} \Leftrightarrow mgd\,\text{sen}(30^\text{o}) - \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu_k F_N d\cos(180^\text{o})$$

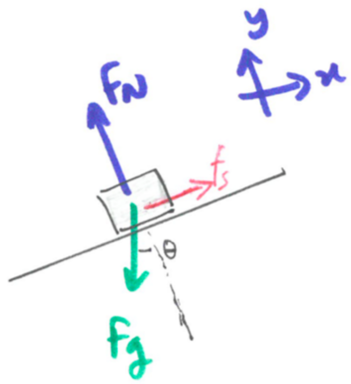
$$\Leftrightarrow mgd\frac{1}{2} - \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu_k mg\frac{\sqrt{3}}{2}d(-1) \Leftrightarrow gd - v_2^2 = -\mu_k gd\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow dg\left(1 + \mu_k\sqrt{3}\right) = v_2^2 \Leftrightarrow d = \frac{v_2^2}{g\left(1 + \mu_k\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow d$$

$$= \frac{2{,}8^2}{9{,}8 \cdot \left(1 + 0{,}30 \cdot \sqrt{3}\right)} = 0{,}5264 \text{ m}$$

Note-se que o resultado não depende da massa. Deixa-se ao estudante reproduzir o resultado usando soma de forças e cinemática.

(c) Aqui temos duas possibilidades: o bloco ou permanece em repouso ou volta para trás, no caso em que o atrito estático insuficiente para o manter em repouso. Há que marcar forças, calcular o atrito estático necessário para o repouso e verificar se é menor do que a saturação. As forças são:



No referencial da figura, a 1ª lei de Newton leva a

$$\begin{matrix} x: & f_s - mg\,\mathrm{sen}\,30 = 0 \\ y: & F_N - mg\cos 30 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f_s = \dfrac{1}{2}mg \\ F_N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg \end{matrix}$$

O valor máximo da força de atrito estático é

$$f_s^{max} = \mu_s F_N \Leftrightarrow f_s^{max} = 0{,}40\frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0{,}3464mg$$

Ora como seria necessária uma força de atrito estático de pelo menos 0,5*mg*, a conclusão é que o bloco, após parar, irá deslizar plano abaixo, até embater de volta na mola.

(d) Na fase de expansão da mola, a energia potencial elástica do sistema massa-mola é transformada em energia cinética do bloco. Durante a subida uma parte dessa energia cinética é transformada em energia potencial gravítica e a outra é dissipada sob a forma de energia interna do bloco e do plano inclinado (aquecimento de ambos).

CRÉDITOS

Nuno Sousa, UAb 28-abr-21