Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
C)	A)	A)

4.1. Como os números considerados estão compreendidos entre 20000 e 70000, o algarismo das dezenas de milhar, representado na figura seguinte por a, só pode tomar valores no conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6\}$:

a				

Assim, qualquer número par da forma $abcde$ que responda ao pedido verifica $a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $e \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$:

a	b	c	d	e

Uma vez que $\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6\}$, dividamos a resolução do problema em dois casos distintos:

1.º caso: $a \in \{2, 4, 6\}$.

Neste caso existem 3 possibilidades para o valor de a, 4 ($= 5 - 1$) possibilidades para o valor de e e para os restantes valores, b, c e d, existem $(10-2) \times (10-3) \times (10-4)$ possibilidades, pois os valores de a, b, c, d e e têm de ser todos diferentes. Tem-se assim um total de

$$3 \times 4 \times (8 \times 7 \times 6) = 4032$$

casos possíveis.

2.º caso: $a \in \{3, 5\}$.

Nesta situação, o valor de e pode ser escolhido entre 5 casos possíveis, restando, tal como anteriormente, $8 \times 7 \times 6$ possibilidades para a escolha dos dígitos b, c, d. Contando com os dois casos possíveis para o valor de a, tem-se assim um total de

$$2 \times 5 \times (8 \times 7 \times 6) = 3360$$

casos possíveis.

Uma vez que os dois casos analisados são disjuntos, tem-se então um total de $4032 + 3360 = 7392$ números pares que respondem ao pedido.

4.2. Para responder a esta questão utilizemos o princípio da inclusão / exclusão. Para tal, sejam

$$\begin{aligned} X &= \{n \in \mathbb{N} : 20000 \leq n \leq 70000\}; \\ A_i &= \{n \in \mathbb{N} : \text{o dígito } i \text{ não aparece}\},\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Pelo princípio referido, pretende-se determinar

$$\#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = \#(X) - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

com

$$\begin{aligned} &\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \#(A_i) - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Assim, atendendo às 5 possibilidades para a escolha do dígito a ($a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$), atendendo que para cada a fixo há 10 possibilidades para a escolha de cada um dos dígitos b, c, d, e (o que para $a = 2$ inclui o caso do número 20000) e atendendo a que o número 70000 também tem de ser considerado:

$$\begin{aligned} &\#(A_1) = 5 \times 9^4 + 1 - \text{porque o 1 não aparece} \\ &\#(A_i) = 4 \times 9^4 + 1 - \text{porque o } i \text{ não aparece}, i = 2, 3 \\ &\#(A_1 \cap A_i) = 4 \times 8^4 + 1 - \text{porque o } 1 \text{ e o } i \text{ não aparecem}, i = 2, 3 \\ &\#(A_2 \cap A_3) = 3 \times 8^4 + 1 - \text{porque o 2 e o 3 não aparecem} \\ &\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3 \times 7^4 + 1 - \text{porque o 1, o 2 e o 3 não aparecem} \end{aligned}$$

Portanto, como $\#(X) = 70000 - 20000 + 1 = 50001$,

$$\begin{aligned} &\#(X) - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 50001 - \left[\big((5 \times 9^4 + 1) + 2 \times (4 \times 9^4 + 1)\big)\right. \\ &\left. - \big(2 \times (4 \times 8^4 + 1) + 3 \times 8^4 + 1\big) + 3 \times 7^4 + 1\right] \\ &= 2560. \end{aligned}$$

5.1. Por indução em $n \geq 1$.

Caso base: $n = 1$.

Como $m < n$, então $m = 0$. Neste caso, como $k^0 = 1$ se $k > 0$ e $0^0 = 1$ por convenção, pelo binómio de Newton tem-se

$$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}k^m = \sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k} = (-1+1)^1 = 0,$$

com o que fica provado o caso base.

Hipótese de indução: Escolhido e fixado um $1 \leq n \in \mathbb{N}$ arbitrário, suponhamos que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m = 0, \quad \forall\, 0 \leq m < n \; (m \in \mathbb{N}).$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^m = 0, \quad \forall\, 0 \leq m < n+1 \; (m \in \mathbb{N}).$$

(Aqui, o n é o mesmo que se fixou na hipótese de indução.)

Passo de indução: Para a prova da tese de indução consideremos dois casos.

1º caso: $m = 0$. Novamente pelo binómio de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^0 = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = (-1+1)^{n+1} = 0.$$

2º caso: $m \neq 0$. Neste caso tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^m &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^m \quad (0^m = 0, \text{ porque } m \neq 0)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}(k+1)^m \quad (\text{mudança variável } k \rightsquigarrow k+1)\\
&= -(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(k+1)^{m-1} \quad (\text{fórmula extração})\\
&= -(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}k^j \quad (\text{binómio Newton})\\
&= -(n+1)\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j}_{(*)} = 0,
\end{aligned}$$

onde, pela hipótese de indução, a soma $(*)$ é igual a 0, porque $0 \leq j \leq m-1 < n$.

Pelo método de indução matemática, fica assim provada a igualdade do enunciado para quaisquer $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, e $0 \leq m < n$.

5.2. Pelo binómio de Newton tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2}+k)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(\sqrt{2})^j k^{n-1-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(\sqrt{2})^j\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{n-1-j}}_{(**)},
\end{aligned}$$

onde, pela alínea anterior, a soma $(**)$ é igual a 0, porque, para $0 \leq j \leq n-1$, tem-se $0 \leq n-1-j \leq n-1 < n$. Por conseguinte,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2}+k)^{n-1} = 0.$$