ANÁLISE INFINITESIMAL - Efólio B| 21175

Perguntas de escolha múltipla:

Turma 1: a - b - d - a - a

Turma 2: a - c -d - a - a

Turma 3: b - b - d - a - c

Turma 4: a - b - c - a - a

Turma 5: d - c - d - a - a

Turma 6: b - b - d - a - c

Turma 7: a - c - d - a - a

Turma 8: c - b - c - d - a

Resolução da pergunta de desenvolvimento

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por $f(x) = xe^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sabendo que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, determine a função derivada de f.

$$f'(x) = (xe^x - 2)' = (xe^x)' - 2' = x'e^x + x(e^x)' - 0 = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

(b) Determine os intervalos de monotonia de f. Mostre que f tem um mínimo absoluto e determine a sua abcissa (x).

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ o estudo dos intervalos de monotonia de f é feito através do estudo do sinal da derivada f'. Ora $f'(x) > 0 \leftrightarrow (1+x)e^x > 0 \leftrightarrow (1+x) > 0 \leftrightarrow x > -1$ porque $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Da mesma maneira $f'(x) < 0 \leftrightarrow (1+x)e^x < 0 \leftrightarrow (1+x) < 0 \leftrightarrow x < -1$. A conclusão é que f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e estritamente crescente em $]-1, +\infty[$.

Segue-se que em $x = -1$ a função atinge um mínimo absoluto com valor $f(-1) = -e^{-1} - 2$. Esta conclusão pode ser verificada utilizando o teorema de Lagrange. Se existisse c tal que $f(c) < f(-1)$ então ou $c > -1$ ou $c < -$. Se $c > -1$ então, sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo teorema de Lagrange (na Sebenta página 109) existe $x \in]-1, c[$ tal que $f'(x) = \frac{f(c)-f(-1)}{c-(-1)} < 0$. Mas isto contradiz o facto de $f'(x) > 0$ para $x \in]-1, +\infty[$. O argumento para o caso $c < -1$ é semelhante.

(c) Determine o polinómio de Taylor de ordem 4 da função f em torno do ponto $x = 0$.

Vamos calcular as primeiro 4 derivadas de f. Já calculamos f'. Temos $f'' = ((1+x)e^x)' = (1+x)'e^x + (1+x)(e^x)' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$, $f^{(iii)} = ((2+x)e^x)' = (2+x)'e^x + (2+x)(e^x)' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$ e da mesma maneira $f^{(iv)} = (3+x)e^x = (4+x)e^x$. Logo podemos calcular $f(0) = -2$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f^{(iii)}(0) = 3$ e $f^{(iv)}(0) = 4$. Substituindo estes valores na fórmula para o polinómio de Taylor de ordem 4 em torno de $x = 0$

$$T^4 = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(iii)}x^3}{3!} + \frac{f^{(iv)}x^4}{4!}$$

obtemos

$$T^4 = -2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$$

(d) Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem uma solução única em $\mathbb{R}$. Justifique a sua resposta.

Pela alínea a), sabe-se que a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, em $[-1, 2]$. Viu-se na alínea b) que $f(-1) = -e^{-1} - 2 < 0$. Por outro lado, tem-se $f(2) = 2e^2 - 2 = 2(e^2 - 1)$. Como $e \approx 2,72$, tem-se que $e^2 > 1$ e $f(2) = 2(e^2 - 1) > 0$. Como f é contínua em $[-1, 2]$, $f(-1) < 0 < f(2)$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in]-1, 2[$ tal que $f(c) = 0$. Assim, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

Quanto à unicidade da solução, observe-se que, para qualquer $x < -1$, tem-se $x < 0$ e $e^x > 0$. Logo $xe^x < 0$ e portanto $xe^x - 2 < 0$. Deduz-se que $f(x) < 0$, para todo o $x < -1$. Logo, em particular, a equação $f(x) = 0$ não tem soluções em $]-\infty, -1[$.

Suponha-se que a equação $f(x) = 0$ tem mais do que uma solução no intervalo $]-1\,,+\infty[$. Sem perda de generalidade, seja $c_1 \in]-1\,,+\infty[$ tal que $c < c_1$ e $f(c) = f(c_1) = 0$. Como se viu na alínea b), a função f é estritamente crescente em $]-1,+\infty[$. Logo, f é injectiva neste intervalo. Tal contradiz o facto de se ter $c \neq c_1$ e $f(c) = f(c_1)$ e, portanto, não existe outra solução de $f(x) = 0$ em $]-1\,,+\infty[$.

Como $f(-1) \neq 0$, conclui-se que a equação $f(x) = 0$ tem uma solução única em $\mathbb{R}$.

FIM