

U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística
4 de setembro de 2018

- INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por 3 grupos de questões e contém 4 página(s). O enunciado da prova possui as páginas numeradas (exceto esta).
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Todas as questões deverão ser **respondidas e justificadas** na folha de ponto, devidamente identificada. Utilize unicamente tinta azul ou preta e uma letra legível.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitida a consulta de quaisquer outros materiais de estudo e tecnologias pessoais. No final do enunciado encontra-se um formulário e tabela da função distribuição Normal Reduzida (normal padrão).
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se estas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:

- Correção científica das respostas; escrita clara e objectiva; estrutura lógica das respostas.
- Apresentação de cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justificação cuidadosa e detalhada de todos os cálculos, raciocínios e afirmações. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- O aluno pode arbitrar um valor adequado da resposta a uma alínea que não tenha respondido, caso este seja necessário para a resolução de uma alínea posterior.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1.1	1.2	2	3
Cotação	4.5	2	2.5	3

- 1 Um grupo de adolescentes, constituído por 12 raparigas e 6 rapazes, entra num elevador cuja carga máxima é de 900 kg. Suponha que os pesos, expressos em kg, dos adolescentes podem ser representados por variáveis aleatórias reais, independentes e gaussianas (normais), de média 50 kg e desvio padrão 5 kg no caso das raparigas, e de média 60 kg e desvio padrão 10 kg no caso dos rapazes.
 - 1.1 Calcule a probabilidade de ser excedida a carga máxima do elevador.
 - 1.2 Qual a probabilidade do peso total no elevador estar entre 1000 e 1200 kg?

- 2 A emissão de uma fonte radioativa é tal que o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos é bem modelado por uma variável aleatória, X , seguindo a lei de Poisson e tal que $E(X^2) = 6$. Calcule a probabilidade de serem emitidas, num período de 10 segundos, 2 partículas.

- 3 Uma empresa de fiscalização de obras de construção civil tem 7 fiscais, dos quais 2 são engenheiros. Para visitar as obras de uma ponte ferroviária foram seleccionados ao acaso 3 fiscais. Determine a função de probabilidade da variável aleatória que representa o número de fiscais que são engenheiros seleccionados para efectuar a visita.

FORMULÁRIO

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

Teorema de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ é uma partição de Ω (espaço de resultados), então, $\forall B$ para o qual $P(B) > 0$, ter-se-á:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j)P(B|A_j)}$$

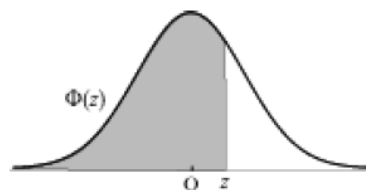
Tabela de Distribuições

	P(X = k) ou f(x)	E(X)	V(X)
<i>Unif</i> (n)	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
<i>Bin</i> (n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	np	np(1-p)
<i>G</i> (p)	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
<i>H</i> (N, M, n)	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
<i>P</i> (λ)	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
<i>U</i> (a, b)	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<i>Exp</i> (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Note que: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon ; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon .$$