Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
D)	D)	D)

4. Seja $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$. Se para algum $k \in \{1, \cdots, m\}$ a soma $a_1 + \cdots + a_k$ for divisível por m, o problema fica automaticamente resolvido.

Suponhamos que nenhuma soma $a_1 + \cdots + a_k$, $k \in \{1, \cdots, m\}$, é divisível por m. Pelo Exercício 1 sobre Congruências, isto significa que

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv r_1 \pmod m \\ a_1 + a_2 &\equiv r_2 \pmod m \\ &\vdots \\ a_1 + \cdots + a_m &\equiv r_m \pmod m \end{aligned}$$

para $r_i \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$. Logo, necessariamente que para algum $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $i \neq j$, $r_i = r_j$. Por conseguinte, pela Proposição 1.24 (propriedades de simetria e de transitividade de uma relação de congruência),

$$a_1 + \cdots + a_i \equiv a_1 + \cdots + a_j \pmod m$$

Supondo sem perda de generalidade que $i > j$, isto é equivalente a

$$m \mid \underbrace{((a_1 + \cdots + a_i) - (a_1 + \cdots + a_j))}_{= a_{j+1} + \cdots + a_i}$$

pelo que o conjunto $B := \{a_{j+1}, \cdots, a_i\}$ responde ao pedido.

5.1. De acordo com o Exercício 9.1 da Atividade Formativa 2,

$$\binom{p}{n} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall\, n = 1, 2, \cdots, p-1; \qquad (*)$$

$$\binom{p}{n-1} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall\, n = 2, \cdots, p.$$

Assim, resulta da lei de Pascal e da Proposição 1.24, alínea 4,

$$\binom{p+1}{n} = \binom{p}{n} + \binom{p}{n-1} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall\, n = 2, \cdots, p-1.$$

5.2. Pela fórmula da adição alternada do índice superior, para qualquer $n \in \{0, \cdots, p-1\}$ tem-se por $(*)$ e pela Proposição 1.24, alíneas 1, 5 e 4,

$$(-1)^n \binom{p-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} \equiv \underbrace{(-1)^0 \binom{p}{0}}_{=1} \pmod{p}.$$

Donde, pelas alíneas 1 e 5 da Proposição 1.24,

$$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

5.3. Tem-se

$$\begin{aligned}
\binom{2p}{p} &= \sum_{n=0}^{p} \binom{p+1}{n}\binom{p-1}{p-n} && \text{(conv. Vandermonde)} \\
&= \sum_{n=1}^{p} \binom{p+1}{n}\binom{p-1}{p-n} && \left(\text{por } \binom{p-1}{p} = 0\right) \\
&= \sum_{n=1}^{p} \binom{p+1}{n}\binom{p-1}{n-1} && \text{(lei da simetria)} \\
&\equiv \binom{p+1}{1}(-1)^0 + \binom{p+1}{p}(-1)^{p-1} \pmod{p},
\end{aligned}$$

onde na última linha utilizaram-se as alíneas 5 e 4 da Proposição 1.24 e os resultados provados nas alíneas 5.1 e 5.2. Como $p > 2$, segue que $p-1$ é um número par e, por conseguinte,

$$\binom{p+1}{1}(-1)^0 + \binom{p+1}{p}(-1)^{p-1} = (p+1)+(p+1) = 2p+2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Assim e por transitividade (Proposição 1.24, alínea 3),

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$