

Grupo I.

1.

$$\det A_k = 1 \times \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Laplace, linha 1})$$

$$= 2k - 3 + 2 - k = k - 1.$$

Assim,

a) é falsa (se $k=1$, A_k não é invertível pois o seu determinante é 0);

b) é verdadeira;

c) é falsa;

d) é falsa (A_1 não é invertível).

2.

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(a, b, c) &= T_2(T_1(a, b, c)) = T_2((a+b)x^2 + cx + 0) \\ &= ((a+b)x + c, 0). \end{aligned}$$

Assim,

a) é falsa, pois $\text{Nuc}(T_2 \circ T_1) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c=0\}$
 $= \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle$, que tem dimensão 2;

b) é verdadeira, pois $\text{Im}(T_2 \circ T_1) = \{(a+b+c, 0) \in \mathbb{R}^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$
 $= \langle (1, 0) \rangle$, que tem dimensão 1;

c) é falsa, pois $\text{Nuc} T_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a+b=0 \text{ e } c=0\}$ e, por exemplo,
 $(-1, 0, 1) \in \text{Nuc}(T_2 \circ T_1)$ mas $(-1, 0, 1) \notin \text{Nuc} T_1$;

d) é falsa, pois uma matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que não é invertível.

3.

Como o exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, onde

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

$$\det(2AC) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$$

concluímos que a), b) e c) podem ser falsas.

d) é verdadeira, pois $\det(BC) = \det(B) \times \det(C)$ para quaisquer matrizes quadradas com a mesma dimensão.

4.

a) é falsa, pois, caso $A^2 = A$, tem-se

$$\begin{aligned} (I_3 - A)^2 &= (I_3 - A)(I_3 - A) = I_3^2 - AI_3 - I_3A + A^2 \\ &= I_3 - A - A + A \quad (\text{pois } A^2 = A) \\ &= I_3 - A \end{aligned}$$

b) é verdadeira pois $A(I_3 - A) = A - A^2 = A - A = 0$.

↑
(pois A é idempotente)

c) é falsa se $A \neq 0$ e $A^2 = A$ pois, nesse caso,

$$A(I_3 + A) = A + A^2 = A + A = 2A$$

d) é falsa, pois $A^2(I_3 - A) = A(A(I_3 - A)) = A \cdot 0 = 0$

↑
(pois, como vimos em b), $A(I_3 - A) = 0$)

Grupo II

a) Se $\alpha_1(u+v) + \alpha_2(u-v) + \alpha_3(v+w) = 0$ então

$$(\alpha_1 + \alpha_2)u + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)v + \alpha_3w = 0.$$

Como u, v, w sejam linearmente independentes a igualdade acima implica termos

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Dagui conclui-se que

$$\alpha_1(u+v) + \alpha_2(u-v) + \alpha_3(v+w) = 0 \stackrel{\in \mathbb{R}^m}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \stackrel{\in \mathbb{R}}{,}$$

ou seja, $u+v, u-v, v+w$ não linearmente independentes.

NOTA: outra forma de provar que a era verdadeira seria usar a sequência de transformações elementares

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1+l_2} \begin{bmatrix} u+v \\ v \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3+l_2} \begin{bmatrix} u+v \\ v \\ v+w \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_2} \begin{bmatrix} u+v \\ -2v \\ v+w \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2+l_1} \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ v+w \end{bmatrix}.$$

DESAFIO: porque é que a proposição 4.27 não pode ser aplicada da forma seguinte?

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_1]{l_1+l_2, l_2+l_3} \begin{bmatrix} u+v \\ v+w \\ w-u \end{bmatrix}$$

Será que $u+v, v+w, w-u$ não linearmente independentes?

b) A matriz $\begin{bmatrix} I_6 & 0_{7 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} \end{bmatrix}$ tem característica 6 e

multidão 6, logo a afirmação é falsa.

Grupo III

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 7 & 8 & k & | & 1 \\ 4 & 5 & 6 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 - 7l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -6 & k-21 & | & -6 \\ 4 & 5 & 6 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - 4l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -6 & k-21 & | & -6 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 - 2l_3}$$

$$\xrightarrow{l_2 - 2l_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & k-9 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Se $k \neq 9$ a única solução do sistema é $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Se $k = 9$ o sistema é possível e indeterminado, sendo as soluções os elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0 = 0 \\ -3y - 6z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(1-2z) + 3z = 1 \\ y = 1 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ y = 1 - 2z \end{cases}$$

ou seja, $\{(-1+z, 1-2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das soluções

do sistema no caso $k = 9$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & k \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 + 0 \\ -7 + 8 + 0 \\ -4 + 5 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ o que confirma a solução obtida no caso } k \neq 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+z \\ 1-2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+z+2(1-2z)+3z \\ -7+7z+8(1-2z)+9z \\ -4+4z+5(1-2z)+6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \cdot z \\ 1+0 \cdot z \\ 1+0 \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

o que confirma as soluções obtidas no caso $k = 9$.

Grupo IV

$$a) \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 9 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2-\lambda \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9 - 6 - 3\lambda) + (9\lambda - 27 + 12) + \lambda[(3-\lambda)(2+\lambda) - 4]$$

$$= 3 - 27 + 12 + (-3\lambda + 9\lambda + 2\lambda) + \lambda^2 - \lambda^3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12$$

b) Os valores próprios de A são os zeros do polinómio $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12$.
(Se algum desses zeros for inteiro será um divisor de -12 .)

$$p(0) = -12$$

$$p(1) = -4$$

$$p(-1) = -2$$

$$p(2) = -8 + 4 + 16 - 12 = 0.$$

Como $p(2) = 0$, 2 é valor próprio de A e o polinómio $p(\lambda)$ é divisível por $\lambda - 2$, e usando a regra de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 8 & -12 \\ 2 & & -2 & -2 & 12 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$$

obtemos $p(\lambda) = (-\lambda^2 - \lambda + 6)(\lambda - 2)$.

Os zeros que faltam podem ser obtidos com a fórmula resolvente:

$$-\lambda^2 - \lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 2.$$

Então $p(\lambda) = -(\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$, pelo que os valores próprios de A são -3 (com multiplicidade algébrica 1) e 2 (com multiplicidade algébrica 2).

c) $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2+l_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3-3l_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Daqui conclui-se que o subespaço próprio associado ao valor próprio 2 é $\{(-y, y, 3y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 3) \rangle$, sendo $\{(-1, 1, 3)\}$ uma base desse subespaço próprio. Daqui conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio 2 é 1 (menor a multiplicidade algébrica, o que permite desde já afirmar que A não é diagonalizável).

$\lambda = -3$:

como a multiplicidade algébrica deste valor próprio é 1 e a multiplicidade geométrica não pode ser maior, podemos já afirmar que a multiplicidade geométrica do valor próprio -3 é 1.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}l_3} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2+l_3} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_1-6l_3} \begin{bmatrix} 0 & -14 & -7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}l_2} \begin{bmatrix} 0 & -14 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_1+7l_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2y \\ x=-3y-(-2y) \end{cases}$$

O subespaço próprio associado ao valor próprio -3 é $\{(-y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, -2) \rangle$ e uma base desse subespaço é $\{(-1, 1, -2)\}$.

d) como a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios é inferior a 3, podemos afirmar que a matriz (3×3) A não é diagonalizável.

Grupo IV

a) $T(1,0,0) = (1,0,0,1)$

$T(0,1,0) = (1,2,0,1)$

$T(0,0,1) = (1,1,-1,-5)$

A matriz pedida neste item é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

b) A única solução de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é

$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (basta olhar, por esta ordem, para as equações 3, 2 e 1 deste sistema),

pois que $Tw = 0 \Leftrightarrow w = (0,0,0)$

c) Como $\text{Nuc } T = \{(0,0,0)\}$, que tem dimensão zero,

tem-se $\dim \text{Im } T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Nuc } T = 3$

d) T é injectiva, pois $\dim \text{Nuc } T = 0$.

T não é sobrejectiva, pois $\dim \text{Im } T < \dim \mathbb{R}^4$

e) Queremos saber se há soluções para

$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ 2w_2 + w_3 = 3 \\ -w_3 = -1 \\ w_1 + w_2 - 5w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_2 = 1 \\ w_3 = 1 \end{cases}$

e da última equação deste sistema, equivalente ao primeiro, podemos concluir que não há.

... Grupo VI

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1+\lambda-\lambda & -\lambda \\ \lambda & 1-\lambda-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \lambda^2 + \lambda^2 = (1-\lambda)^2$$

O único valor próprio é 1, com multiplicidade algébrica 2, e podemos encontrar o subespaço próprio associado resolvendo

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

Portanto, para $\lambda \neq 0$, a multiplicidade geométrica do único valor próprio é 1, o que significa que a matriz A é diagonalizável.

Para $\lambda = 0$ fica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que é diagonal e, logo, diagonalizável.