Proposta de resolução do e-fólio B (janeiro 2017)

I. Questões de escolha múltipla.

1. Tem-se $u - v = (1, 0, 3) - (1, -3, 2) = (0, 3, 1)$ e portanto se $\alpha = 1$ então w pertence ao subespaço gerado por u e v.

Em alternativa, como u e v são linearmente independentes considerando uma matriz D cujas linhas (ou colunas) são os vetores u, v e w, uma condição necessária e suficiente para que w pertença ao subespaço gerado por u e v é que $\det D = 0$.

2. As alíneas b) e d) são claramente falsas, e c) contradiz o Teorema das Dimensões.

Se $\dim F = 3 < \dim G$ então, como estamos num espaço de dimensão 4 isso significa que $\dim G = 4$ e portanto $G = \mathbb{R}^4$, logo $F \cap G = F \cap \mathbb{R}^4 = F$.

3. O núcleo de g é constituido pelos vetores (a, b, c) tais que $g(a, b, c)$ é o polinómio nulo, ou seja $ax^3 + bx^2 + bx = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $x(ax^2 + bx + b) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e escolhendo $x = -1$ obtemos que $a = 0$ e escolhendo $x = 1$ obtemos que $2b = 0$ e portanto o núcleo é constituido pelos vetores da forma $(0, 0, c)$, logo uma base pode ser $(0, 0, 1)$.

4. Facilmente se verifica que $f(x, y, z) = (xy, z)$ não é linear, e que a aplicação da alínea d) também não, pois não está sequer bem definida visto que o conjunto das matrizes invertíveis não é um subespaço.

Vejamos que p é linear. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$p(\lambda(ax^2+bx+c)) = p((\lambda a)x^2+(\lambda b)x+\lambda c) = (\lambda a, \lambda b) = \lambda(a, b) = \lambda p(ax^2+bx+c).$$

De forma análoga se verifica que

$$p((ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c')) = p(ax^2 + bx + c) + p(a'x^2 + b'x + c').$$

II. 1. Pelo Teorema das Dimensões tem-se neste caso

$$\dim(F+G) = \dim F+\dim G-\dim(F\cap G) = 3+3-\dim(F\cap G) = 6-\dim(F\cap G).$$

Mas com estamos num espaço de dimensão 5 temos que $5 \geqslant \dim(F+G)$ e portanto

$$5 \geqslant \dim(F + G) = 6 - \dim(F \cap G) \implies \dim(F \cap G) \geqslant 6 - 5 = 1.$$

Então $F \cap G$ contem pelo menos um vetor não nulo pois é um subespaço de dimensão maior ou igual 1.

Em alternativa, supondo por absurdo que a intersecção era vazia obtinha-se $\dim(F + G) = 6 - \dim(F \cap G) = 6$, impossível em $\mathbb{R}^5$.

2. Esta aplicação é linear pois dados 2 polinómios p e q, a imagem por T do polinómio $p + q$ é a soma das imagens de p e de q, e dado $\lambda \in \mathbb{R}$ a imagem do polinómio λp por T é $\lambda T(p)$,

$$T((p+q)(x)) = x^2(p+q)(x) = x^2[p(x)+q(x)] = x^2p(x)+x^2q(x) = Tp(x)+Tq(x)$$

e

$$T(\lambda p)(x) = x^2(\lambda p)(x) = x^2(\lambda[p(x)]) = (x^2\lambda)p(x) = \lambda x^2p(x) = \lambda Tp(x).$$

III. i) Considerando a base canónica em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a matriz que representa f á matriz que tem por colunas a imagem na base canónica de cada um dos elementos da base canónica, ou seja

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\
f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\\
f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\\
f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

E portanto $C = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

ii)/iii) A matriz C tem a 2^{a} e a 3^{a} colunas iguais; as colunas 1, 2 e 4 são linearmente independentes (porquê?) e portanto uma base para o espaço das colunas pode ser $(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)$.

Como C é simétrica esta sequência também é uma base para o espaço das linhas de C.

iv) Pela proposição 5.16 (pág. 307, 3^{a} edição) a imagem de C é gerada pelas imagens dos vetores da base (canónica), ou seja pelos vetores $(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)$.

v) O núcleo de C corresponde às soluções da equação $C(x,y,z,w)=0$, ou seja em forma matricial

$$
\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x &= 0\\ y+z &= 0\\ y+z &= 0\\ 2w &= 0\end{cases} \iff x=0, y=-z, w=0,
$$

e portanto uma base do núcleo pode ser $(0,1,-1,0)$.

vi) Os valores próprios de C são as soluções da equação de 4^{o} grau $\det(C-\lambda I_4)=0$, ou seja

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} &= (2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} \text{ (usando Laplace, linha 1)}\\
&= (2-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} \text{ (usando Laplace, linha 3)}\\
&= (2-\lambda)^2((1-\lambda)^2-1) \text{ (usando } a^2-b^2=(a-b)(a+b))\\
&= (2-\lambda)^2(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = \lambda(2-\lambda)^3.
\end{aligned}
$$

Os valores próprios são 0 e 2.

vii) O valor próprio 0 tem multiplicidade algébrica 1, e também multiplicidade geométrica 1. O valor próprio 2 tem multiplicidade algébrica 3 e para calcular a sua multiplicidade geométrica vamos calcular o seu espaço próprio, ou seja as soluções de $(C - 2I_4)(x, y, z, w)\top = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = z.$$

Ou seja o espaço próprio do valor próprio 2 é gerado pelos vetores $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ da forma $(x, y, y, w), \forall x, y, w$, que ainda podemos escrever como o conjunto $x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1), \forall x, y, w$; este espaço tem dimensão 3, pois é gerado por 3 vetores próprios lineamente independentes $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$, que constituem portanto uma base.

viii) Vamos usar a Proposição 6.35 (pág. 391, 3ª edição), que garante que a matriz C é diagonalizável se e só se tiver n vetores próprios linearmente independentes, o que é o caso (porquê?). Esta proposição fornece também um método para construir a matriz que diagonaliza C, é a matriz P cujas colunas são os vetores próprios obtidos anteriormente e a matriz diagonal D semelhante a C é a matriz cujos elementos da diagonal são os valores próprios (pela mesma ordem em P e em D).

Ou seja tem-se, por exemplo

$$P^{-1}CP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ onde } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou

$$P_0^{-1}CP_0 = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. Por hipótese temos $Au = \lambda_1 u$ e $Av = \lambda_2 v$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Suponhamos que existiam α e β não nulos tais que $\alpha u + \beta v$ é um vetor próprio de A. Então existe um escalar μ tal que $A(\alpha u + \beta v) = \mu(\alpha u + \beta v)$, e como u e v são vetores próprios tem-se também que $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v = \alpha\lambda_1 u + \beta\lambda_2 v$, e portanto igualando as duas expressões anteriores $\mu(\alpha u + \beta v) = \alpha\lambda_1 u + \beta\lambda_2 v$, ou seja $\alpha(\lambda_1 - \mu)u + \beta(\lambda_2 - \mu)v = 0$. Mas u e v são vetores próprios associados a valores próprios diferentes logo, pela Prop. 6.30 (pág. 387, 3ª edição), são linearmente independentes e portanto, pela Prop. 4.23 (pág. 207, 3ª edição), a única combinação linear nula possível é a que tem coeficientes nulos e portanto (recordando que α e β são diferentes de zero)

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1 - \mu)u + \beta(\lambda_2 - \mu)v = 0 &\implies \alpha(\lambda_1 - \mu) = 0 \text{ e } \beta(\lambda_2 - \mu) = 0 \\ &\implies \lambda_1 - \mu = 0 \text{ e } \lambda_2 - \mu = 0 \\ &\implies \lambda_1 = \mu = \lambda_2. \end{aligned}$$

O que é absurdo pois por hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2$.