Atividade Formativa 3

Proposta de Resolução

1. Todas estas primitivas são "imediatas" (cf. Secção 6.6), embora por vezes isso não seja imediatamente óbvio.

1.1. Assim, $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ e, portanto, uma primitiva de xe^{x^2} é $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

1.2. Analogamente, $(\cos(x^3))' = -3x^2\text{sen}(x^3)$ e, portanto, uma primitiva de $x^2\text{sen}(x^3)$ é $-\frac{1}{3}\cos(x^3)$.

1.3. Escrevendo $\frac{1}{x\ln x}$ como $\frac{1/x}{\ln x}$, uma primitiva de $\frac{1}{x\ln x}$ é $\ln(\ln x)$, $x > 1$.

1.4. Uma vez que $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, uma primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$ é $\arctan x$.

2. Uma técnica de primitivação é a primitivação por partes. Esta técnica baseia-se na expressão da derivada de um produto de funções,

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Por primitivação de ambos os lados obtém-se

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx. \tag{1}$$

A principal dificuldade está na escolha das funções u e v.

2.1. No caso da função $\ln^2 x$ escolha-se, por exemplo, $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln^2 x$. Assim, $u(x) = x$, $v'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, resultando de (1) que

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx = x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1),$$

onde na última igualdade se fez uso do Exemplo 5, pág. 496, para o cálculo da primitiva da função logaritmo.

Alternativamente, escolha-se $u'(x) = v(x) = \ln x$ e, portanto, $u(x) = x\ln x - x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$. Por (1) tem-se

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x\,dx &= x\ln^2 x - x\ln x - \int \frac{x\ln x - x}{x}\,dx \\ &= x\ln^2 x - x\ln x - \int (\ln x - 1)\,dx \\ &= x\ln^2 x - x\ln x - \int \ln x\,dx + \int 1\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.\end{aligned}$$

2.2. Para a função $\cos(\ln x)$ escolha-se $u'(x) = 1$, $v(x) = \cos(\ln x)$ e, por conseguinte, $u(x) = x$, $v'(x) = -\frac{1}{x}\mathrm{sen}(\ln x)$. Por (1) tem-se

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \frac{x}{x}\mathrm{sen}(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx.$$

Neste caso é necessário fazer uma nova primitivação por partes, escolhendo agora $u'(x) = 1$ e $v(x) = \mathrm{sen}(\ln x)$ e, portanto, $u(x) = x$ e $v'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$. Tem-se

$$\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Mas esta última primitiva é exatamente a primitiva de partida. Ou seja, pelos cálculos anteriores tem-se

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln x)\,dx &= x\cos(\ln x) + \int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx \\ &= x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx,\end{aligned}$$

o que implica que

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)$$

e, consequentemente,

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{x}{2}\mathrm{sen}(\ln x).$$

3. Neste grupo as funções sob consideração são racionais.

3.1. Para a função $\frac{x^2+x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$ comece-se por determinar as raízes do denominador. Sabido que 1 é uma das raízes tem-se

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

o que permite decompor a função dada na soma de frações simples:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Primitivando a igualdade anterior obtém-se então

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx &= \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x-2}\,dx + \int \frac{C}{x-3}\,dx \\ &= A\ln|x-1| + B\ln|x-2| + C\ln|x-3|.\end{aligned}$$

Resta assim determinar as constantes A, B e C. Para o efeito, note-se que

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

em que a última expressão tem de ser igual a $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. Assim,

$$(A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C = x^2 + x + 1$$

o que conduz a

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ -5A-4B-3C = 1 \\ 6A+3B+2C = 1. \end{cases}$$

Este sistema de três equações e três incógnitas tem solução única:

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -7, \quad C = \frac{13}{2}.$$

3.2. No caso da função $\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3x+2}$, o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Comece-se então por dividir x^4-2x^2+6 por x^2-3x+2. Obtém-se

$$\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3x+2} = x^2+3x+5+\frac{9x-4}{x^2-3x+2} = x^2+3x+5+\frac{14}{x-2}-\frac{5}{x-1},$$

onde na última igualdade se utilizou o facto de $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ e de $\frac{9x-4}{(x-1)(x-2)}=\frac{14}{x-2}-\frac{5}{x-1}$.

Portanto, a primitiva de $\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3x+2}$ é igual a

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3x+2}\,dx\\
&=\int \left(x^2+3x+5\right)\,dx+\int \frac{14}{x-2}\,dx-\int \frac{5}{x-1}\,dx\\
&=\int x^2\,dx+3\int x\,dx+5\int 1\,dx+14\int \frac{1}{x-2}\,dx-5\int \frac{1}{x-1}\,dx\\
&=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+5x+14\ln|x-2|-5\ln|x-1|.
\end{aligned}$$

3.3. Para a função $\frac{2x^2-3x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}$ tem-se a seguinte decomposição em frações simples:

$$\frac{2x^2-3x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Como anteriormente, calculando os coeficientes A, B, C e D obtém-se

$$\frac{2x^2-3x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}=\frac{29}{25(x+2)}+\frac{21}{5(x+2)^2}+\frac{-29x+3}{25\,(x^2+1)},$$

e, por conseguinte, a primitiva de $\frac{2x^2-3x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}$ é igual a

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2-3x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}\,dx\\
&=\int \frac{29}{25(x+2)}\,dx+\int \frac{21}{5(x+2)^2}\,dx+\int \frac{-29x+3}{25\,(x^2+1)}\,dx\\
&=\frac{29}{25}\int \frac{1}{x+2}\,dx+\frac{21}{5}\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx-\frac{29}{50}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\frac{3}{25}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\
&=\frac{29}{25}\ln|x+2|-\frac{21}{5(x+2)}-\frac{29}{50}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{25}\arctan x.
\end{aligned}$$

4.1. Para o cálculo de uma primitiva da função $\frac{1}{1+\cos x}$ existem (pelo menos) dois métodos: um deles consiste em multiplicar o numerador e o denominador por $1-\cos x$ e usar o facto de $1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x$; um outro método é utilizar a igualdade $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ (Teorema 1, pág. 519) e, assim,

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\tan\frac{x}{2}.$$

4.2. Considere-se a substituição $t = \sqrt{x}$ para $x > 0$. Trata-se de uma função injetiva cuja função inversa é $x = t^2$. Donde, $dx = 2t\,dt$ e, portanto,

$$\int e^{2\sqrt{x}}\,dx = \int e^{2t} \underbrace{2t\,dt}_{=dx} = 2e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

onde na última igualdade se utilizou o método de primitivação por partes. Como $t = \sqrt{x}$ tem-se então

$$\int e^{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

4.3. Para a função $\frac{x}{1+\sqrt{x}}$ utilize-se a mesma substituição que na alínea anterior. Deste modo obtém-se

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t} 2t\,dt = 2\int \frac{t^3}{1+t}\,dt,$$

com

$$\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

e, portanto,

$$\int \frac{t^3}{1+t}\,dt = \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log|t+1|.$$

Atendendo a que $t = \sqrt{x}$, $x > 0$, obtém-se por fim

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)\right].$$

4.4. Para a função $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ utilize-se a substituição $t = e^x$. Tem-se $dt = e^x\,dx$ e

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{1+e^{2x}}}_{=\frac{1}{1+t^2}} \underbrace{e^x\,dx}_{=dt} = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t.$$

Atendendo a que $t = e^x$ obtém-se

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan e^x.$$

5. Como sugerido, considere-se a substituição $x = a\cos\theta$, que é uma função injetiva no intervalo $]0, \pi[$. Então $dx = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$ pelo que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a \int \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = -a \int \sqrt{a^2\mathrm{sen}^2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta.$$

Como $a > 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta > 0$ para $\theta \in]0, \pi[$, tem-se que a última expressão é igual a

$$-a \int (a\mathrm{sen}\,\theta)\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = -a^2 \int \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta.$$

Para calcular esta última primitiva pode fazer-se como sugerido no exercício (7) pág. 526. Em alternativa a essa proposta, note-se que

$$\int \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta = \int (1 - \cos^2\theta)\, d\theta = \theta - \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, cf. Exemplo 4 pág. 518. Dos cálculos anteriores resulta assim que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{a^2}{2}(\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

com $\theta = \arccos\frac{x}{a}$, $\cos\theta = \frac{x}{a}$ (por $x = a\cos\theta$) e

$$\begin{aligned} x = a\cos\theta \implies & x^2 = a^2\cos^2\theta = a^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta) \\ \implies & a^2 - x^2 = a^2\mathrm{sen}^2\theta \implies a\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

onde na última implicação utilizou-se novamente o facto de $a > 0$ e de $\mathrm{sen}\,\theta > 0$ para $\theta \in]0, \pi[$. Estes factos conjugados permitem concluir que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\frac{x}{a}\right) + C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Observe-se que por $x = a\cos\theta$ com $\theta \in]0, \pi[$, tem-se $\frac{x}{a} \in]-1, 1[$, pelo que, como indicado na pág. 156,

$$\arccos\frac{x}{a} + \mathrm{arcsen}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Por este motivo, o resultado também pode ser apresentado na forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsen}\frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

usual na literatura.