

U.C. 21082
Matemática Finita
9 de junho de 2017

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 9 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
4.0	2.0	3.3	1.7	5.0

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam X e Y dois conjuntos tais que $X \cap Y = \{a\}$. Se $\#X = n$ e $\#Y = m$, então $\#(X \times Y)$ é igual a

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) $n \times m$ | <input type="checkbox"/> c) $(n - 1) \times m$ |
| <input type="checkbox"/> b) $(n - 1) \times (m - 1)$ | <input type="checkbox"/> d) $(n - 1) \times (m - 1) + 1$ |

2. Dados $0 \leq k < n$, a soma

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

não é igual a

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) $\binom{n+1}{k+1}$ | <input type="checkbox"/> c) $\binom{n+1}{n-k}$ |
| <input type="checkbox"/> b) $\binom{n}{k+1}$ | <input type="checkbox"/> d) $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$ |

3. Das opções seguintes indique a verdadeira:

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\text{mdc}(-2, 6) = -2$ | <input type="checkbox"/> c) $\text{mdc}(-2, 6) = 1$ |
| <input type="checkbox"/> b) $\text{mdc}(-2, 6) = -1$ | <input type="checkbox"/> d) $\text{mdc}(-2, 6) = 2$ |

4. Considere as duas afirmações seguintes:

- (i) 10 é invertível módulo 17
- (ii) 17 é invertível módulo 34

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- a) Ambas as afirmações são verdadeiras
- b) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa
- c) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira
- d) Ambas as afirmações são falsas

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. Considere todos os números naturais entre 1 e 100, inclusive.

5.1. Determine quantos destes números são divisíveis por 9.

5.2. De acordo com um dos critérios de divisibilidade por 9, um número $(a_2a_1a_0)_{10}$ é divisível por 9 se a soma dos seus dígitos $a_0 + a_1 + a_2$ é divisível por 9. Utilizando este critério de divisibilidade, confirme o resultado obtido na alínea anterior.

5.3. Entre os números naturais entre 1 e 100, inclusive, indique, justificando, quantos são divisíveis por 9 ou por 5.

6. Mostre que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

7. Sejam a e b dois números naturais tais que $a \equiv b \pmod{2}$.

7.1. Mostre que, ou a e b são ambos pares, ou a e b são ambos números ímpares.

7.2. Supondo que b e 2 são números primos entre si, prove que a e 2 são números primos entre si.

8. Sem utilizar o algoritmo de Euclides, prove que a seguinte fracção é irredutível

$$\frac{72683}{14}.$$

9. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

9.1. Determine o termo geral da sucessão.

9.2. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que 3 é um divisor de $a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

9.3. Prove que para qualquer $n \in \{1, 2, \dots\}$ tem-se $\text{mdc}(a_n, 5) = 1$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM