Matemática Preparatória | 21160

Proposta sumária de resolução

1. **[0.5 val.]** Calcule o valor exato de

$$\log\left(\sqrt{0.01\times 10^4}\right)-\log_3\left(21^{\sqrt{2}}\div 7^{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(e^{\sqrt{8}}\times e^{\sqrt{2}}\right).$$

$$\begin{aligned}
& \log\left(\sqrt{0.01\times 10^4}\right)-\log_3\left(21^{\sqrt{2}}\div 7^{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(e^{\sqrt{8}}\times e^{\sqrt{2}}\right)\\
= \; & \log\left(\sqrt{10^{-2}\times 10^4}\right)-\log_3\left(\frac{21^{\sqrt{2}}}{7^{\sqrt{2}}}\right)+\ln\left(e^{\sqrt{8}+\sqrt{2}}\right)\\
= \; & \log\left(\sqrt{10^2}\right)-\log_3\left(\left(\frac{21}{7}\right)^{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(e^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)\\
= \; & \log(10)-\log_3\left(3^{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(e^{3\sqrt{2}}\right)\\
= \; & 1-\sqrt{2}+3\sqrt{2}\\
= \; & 1+2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

2. **[0.5 val.]** Seja k um número real e o polinómio $P(x)=x^4+2x^2-k$ que é divisível por x^2+2. Determine k e fatorize $P(x)$.

Para que $P(x)$ seja divisível por x^2+3, é preciso que o resto da divisão seja nulo.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & +2x^2 & +0x & -k & x^2+3 \\ \cline{6-6}
-(x^4 & & +3x^2 & &) & x^2-1 \\ \cline{1-5}
& & -x^2 & & -k & \\
& & -(-x^2 & & -3) & \\ \cline{2-5}
& & & & -k+3 &
\end{array}$$

Logo, $-k+3=0 \Leftrightarrow k=3$.

Sendo assim, como $x^2-1=(x-1)(x+1)$ é um caso notável,

$$P(x)=x^4+2x^2-3=(x^2+3)(x^2-1)=(x^2+3)(x-1)(x+1).$$

3. Resolva as equações.

(a) **[0.4 val.]** $81^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{27^x}}$.

$$\begin{aligned} & 81^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{27^x}} \Leftrightarrow (3^4)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{(3^3)^x}} \Leftrightarrow 3^{4x^2} = \frac{1}{((3^3)^x)^{\frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \quad & 3^{4x^2} = 3^{-\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow 4x^2 = -\frac{3x}{2} \Leftrightarrow x(4x + \tfrac{3}{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \vee 4x = -\tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

$\therefore C.S. = \left\{-\frac{3}{8}, 0\right\}$

(b) **[0.4 val.]** $1 - \log(x+1) = \log(x-2)$.

$$\begin{aligned} & 1 - \log(x+1) = \log(x-2) \Leftrightarrow 1 = \log(x+1) + \log(x-2) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \log[(x+1)(x-2)] \\ \Leftrightarrow \quad & 10 = (x+1)(x-2) \wedge x+1 > 0 \wedge x-2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x = 4 \vee x = -3) \wedge x > 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 \end{aligned}$$

$\therefore C.S. = \{4\}$

(c) **[0.4 val.]** $\cos(2x) + \cos(6x) = \sin(3x) - \sin(5x), x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Para resolver $\cos(2x) + \cos(6x) = \sin(3x) - \sin(5x)$, é importante saber as fórmulas para $\cos(A)+\cos(B)$ e $\sin(A)-\sin(B)$. Uma vez que se trata de uma avaliação com consulta, este primeiro passo pode ser omitido (aqui a vermelho), começando a resolução a partir das fórmulas que vamos relembrar.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Subtraíndo as fórmulas anteriores, obtém-se

$$\begin{array}{c|c} \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ -[\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)] & -[\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)] \\ \hline \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) & \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) \end{array}$$

Fazendo $A = a + b$ e $B = a - b$,

$$\sin(A) - \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \qquad \cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
& \cos(2x) + \cos(6x) = \sin(3x) - \sin(5x) \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos\left(\tfrac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{2x-6x}{2}\right) = 2\cos\left(\tfrac{3x+5x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3x-5x}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{2}\cos(4x)\cos(2x) = \cancel{2}\cos(4x)\sin(-x) \\
\Leftrightarrow\ & \cos(4x)\cos(2x) = \cos(4x)(-\sin x) \\
\Leftrightarrow\ & \cos(4x)\left[\cos(2x) + \sin(x)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos(4x) = 0 \vee \cos(2x) + \sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos(4x) = 0 \vee 1 - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo a primeira equação,

$$\cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{8} + k\tfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Juntando $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = -\frac{3\pi}{8} \vee x = -\frac{\pi}{8} \vee x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{3\pi}{8}$.

Resolvendo a segunda equação,

$$-2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-2)\times 1}}{2\times(-2)}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \tfrac{1}{2} \vee \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{6} + k\tfrac{2\pi}{3} \vee x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Juntando $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = -\frac{\pi}{6}$.

$\therefore C.S. = \left\{-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\}$

4. **[0.5 val.]** Resolva a inequação $|x+2| - |x-4| \geqslant 5$.

$$|x+2| \geqslant |x-4| + 5$$

$x \geqslant 4$ | $x < 4$

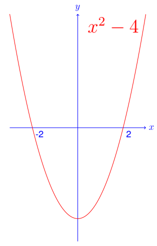
$x \geqslant 4$	$x < 4$
$\lvert x+2\rvert \geqslant \lvert x-4+5\rvert$	$\lvert x+2\rvert \geqslant \lvert -x+4+5\rvert$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geqslant x^2 + 2x + 1$	$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geqslant x^2 - 18x + 81$
$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{7}{2}$

Juntando as condicões, $\left(x \geqslant 4 \wedge x \geqslant -\frac{3}{2}\right) \vee \left(x < 4 \wedge x \geqslant \frac{7}{2}\right)$, resulta no conjunto solução $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-4}}.$$

(a) **[0.4 val.]** Determine o domínio e os zeros de f.



$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-6 = 0 \wedge x \in D_f$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1 \times (-6)}}{2\times 1} \wedge x \in D_f$

$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 2) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = -3$

Zeros: $\{-3\}$

(b) **[0.4 val.]** Justifique por que é que a função f não é par nem ímpar.

Para que f seja par, $f(x) = f(-x), \forall x \in D_f$ e para que f seja ímpar, $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$. Consideremos, como contra-exemplo, $x = 3$.

$$f(3) = \frac{3^2+3-6}{\sqrt{3^2-4}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \neq 0 = \frac{(-3)^2+(-3)-6}{\sqrt{(-3)^2-4}} = f(-3)$$

$$f(3) = \frac{3^2+3-6}{\sqrt{3^2-4}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \neq -\frac{6\sqrt{5}}{5} = -f(3)$$

6. **[0.5 val.]** Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_1 = 6$ e $u_{19} = 12$. Determine o termo de ordem 567 da progressão.

Sendo uma progressão aritmética de razão r, $u_n = u_1 + (n-1)r$,

$u_{19} = u_1 + (19-1)r \Leftrightarrow 12 = 6 + 18r \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$.

Logo, $u_{567} = u_1 + (567-1) \times \frac{1}{3} = \frac{584}{3}$.

FIM