Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 26 de Março a 9 de Abril de 2026

Enunciado

1. (1.0 val.) Uma empresa de produção de sabonetes pretende definir um novo plano de fabrico para três tipos de sabonetes (A, B e C). Cada tipo de sabonete requer três etapas de processamento: preparação da base, incorporação de ingredientes e acabamento final. As necessidades de cada etapa, expressas em minutos por unidade, encontram-se indicadas na tabela seguinte.

Sabonetes	Preparação da base	Incorporação de ingredientes	Acabamento final
A	12	15	6
B	10	12	4
C	8	8	2

O departamento de produção informa que, semanalmente, há disponibilidade de 40 horas na secção preparação da base (um trabalhador), 80 horas na secção incorporação de ingredientes (2 trabalhadores) e 24 horas na secção acabamento final (um trabalhador em part-time). Os sabonetes são vendidos em caixas com 12 unidades, sendo estimado o lucro por caixa de 12 €, 9 € e 8 €, respetivamente nos sabonetes A, B e C. O departamento de marketing informou que semanalmente não serão vendidas mais de 16 caixas de sabonete tipo C. Além disso o número de caixas disponíveis para embalar os sabonetes é 50 por semana (todos os tipos de sabonetes são embalados na mesma caixa, só é alterada a impressão).

Formalize o problema em Programação Linear.

Variáveis de decisão:
X_A: quantidade de caixas com 12 sabonetes de tipo A produzidos semanalmente;

X_B: quantidade de caixas com 12 sabonetes de tipo B produzidos semanalmente;
X_C: quantidade de caixas com 12 sabonetes de tipo C produzidos semanalmente.

Função objetivo, a maximizar (lucro):

$$F(X_A, X_B, X_C) = 12X_A + 9X_B + 8X_C$$

Restrições:
$12 \times 12X_A + 10 \times 12X_B + 8 \times 12X_C \leq 40 \times 60$ "Semanalmente, há disponibilidade de 40 horas (40×60 minutos) na secção preparação da base". Como as variáveis de decisão são caixas de 12 sabonetes, cada tempo de preparação é multiplicado por 12 unidades.
$15 \times 12X_A + 12 \times 12X_B + 8 \times 12X_C \leq 80 \times 60$ "Semanalmente, há disponibilidade de 80 horas (80×60 minutos) na secção incorporação de ingredientes". Como as variáveis de decisão são caixas de 12 sabonetes, cada tempo de preparação é multiplicado por 12 unidades.
$6 \times 12X_A + 4 \times 12X_B + 2 \times 12X_C \leq 24 \times 60$ "Semanalmente, há disponibilidade de 24 horas (24×12 minutos) na secção acabamento final". Como as variáveis de decisão são caixas de 12 sabonetes, cada tempo de preparação é multiplicado por 12 unidades."
$X_C \leq 16$ "Odepartamento de marketing informou que semanalmente não serão vendidas mais de 16 caixas de sabonete tipo C."
$X_A + X_B + X_C \leq 50$ "O número de caixas disponíveis para embalar os sabonetes é 50 por semana."
$X_A, X_B, X_C \geq 0$ condições de não negatividade.

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F(X_A, X_B, X_C) = 12X_A + 9X_B + 8X_C$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 144X_A + 120X_B + 96X_C \leq 2400 \\ 180X_A + 144X_B + 96X_C \leq 4800 \\ 72X_A + 48X_B + 24X_C \leq 1440 \\ X_C \leq 16 \\ X_A + X_B + X_C \leq 50 \\ X_A, X_B, X_C \geq 0 \end{cases}$$

2. (1.5 val.)

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

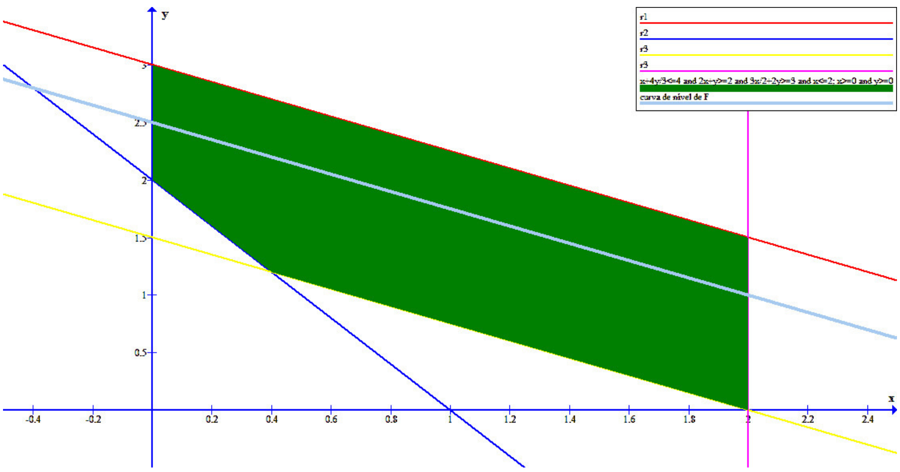
Maximizar: $F = 3X + 4Y$

Sujeito a:

$$\begin{cases} X + \frac{4}{3}Y \leq 4 \\ 2X + Y \geq 2 \\ \frac{3}{2}X + 2Y \geq 3 \\ X \leq 2 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

Determine a solução óptima do problema recorrendo ao método gráfico e diga, justificando, se a solução óptima encontrada é única.

A reta $r_1 : \ X + \frac{4}{3}Y = 4 \ \Leftrightarrow \ \frac{4}{3}Y = 4 - X \ \Leftrightarrow \ Y = 3 - \frac{3}{4}X$ passa nos pontos $(0, 3)$ e $(4, 0)$.
A reta $r_2 : \ 2X + Y = 2 \ \Leftrightarrow \ Y = 2 - 2X$ passa nos pontos $(0, 2)$ e $(2, 0)$.
A reta $r_3 : \ \frac{3}{2}X + 2Y = 3 \ \Leftrightarrow \ 2Y = 3 - \frac{3}{2}X \ \Leftrightarrow \ Y = \frac{3}{2} - \frac{4}{3}X$ passa nos pontos $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $(2, 0)$.
A reta $r_4 : \ X = 2$ é uma recta vertical que passa no ponto $(2, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $3X + 4Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -\frac{3}{4}X + \frac{1}{4}z.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Como se pode ver, as rectas de nível de F são paralelas à recta r_1, logo as soluções óptimas do problema encontram-se no segmento da recta r_1 entre os pontos $(0, 3)$ e $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Na figura acima, pode ver-se uma curva de nível (reta azul claro).

Assim, a solução pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
(X^*, Y^*) &= \lambda(0,3) + (1-\lambda)\left(2, \frac{3}{2}\right) = \\
&= \left(2 - 2\lambda, 3\lambda + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) = \\
&= \left(2 - 2\lambda, \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right), \qquad \text{com } \lambda \in [0,1] \, .
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
F^* &= F(X^*, Y^*) = \\
&= F\left(2 - 2\lambda, \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right) = \\
&= 3(2-2\lambda) + 4\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right) = \\
&= 6 - 6\lambda + 6\lambda + 6 = 12 \, .
\end{aligned}
$$

3. (1.5 val.) Determine, recorrendo ao método Simplex, a solução óptima do seguinte problema de programação linear:

Maximizar: $F = 7X + 8Y + 3Z$

Sujeito a:

$$
\begin{cases}
X + 3Y + Z \geq 40 \\
2X + 2Y + Z \leq 40 \\
X + 2Y + Z \leq 30 \\
X, Y, Z \geq 0
\end{cases}
$$

Forma standard:

$$
\max F = 7X + 8Y + 3Z + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha
$$

$$
\text{s.a.} \begin{cases}
X + 3Y + Z - F_1 + \alpha = 40 \\
2X + 2Y + Z + F_2 = 40 \\
X + 2Y + Z + F_3 = 30 \\
X, Y, Z, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0
\end{cases}
$$

	X	Y	Z	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
	1	3	1	-1	0	0	1	40	
F_2	2	2	1	0	1	0	0	40	
F_3	1	2	1	0	0	1	0	30	
$-F$	-7	-8	-3	0	0	0	M	0	$(l_4 - Ml_1)$
α	1	3	1	-1	0	0	1	40	$40 \quad (l_1 - \frac{1}{2}l_2$
F_2	2	2	1	0	1	0	0	40	$20 \leftarrow \quad (\frac{1}{2}l_2$
F_3	1	2	1	0	0	1	0	30	$30 \quad (l_3 - \frac{1}{2}l_2$
$-F$	$-7-M$	$-8-3M$	$-3-M$	M	0	0	0	$-40M$	$(l_4 + \frac{7+M}{2}l_2)$
	$\uparrow$								
α	0	2	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	20	$10 \leftarrow \quad (\frac{1}{2}l_1$
X	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	20	$20 \quad (l_2 - \frac{1}{2}l_1$
F_3	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	$10 \quad (l_3 - \frac{1}{2}l_2$
$-F$	0	$-1-2M$	$\frac{1}{2} - \frac{M}{2}$	M	$\frac{7}{2} + \frac{M}{2}$	0	0	$140 - 20M$	$(l_4 + \frac{1+2M}{2}l_1)$
		$\uparrow$							
Y	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	10	$(l_1 + l_3)$
X	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	10	$20 \quad (l_2 - l_3)$
F_3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$0 \leftarrow \quad (2l_3)$
$-F$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$	0	$\frac{1}{2} + M$	150	$(l_4 + l_3)$
				$\uparrow$					
Y	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
X	1	0	0	0	1	-1	0	10	
F_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2	-1	0	
$-F$	0	0	1	0	3	1	M	150	

Neste ponto, o algoritmo pára, uma vez que já não existem valores negativos na linha do F (ignora-se a coluna da variável artificial).

Logo, concluímos que este problema tem solução $(X^*, Y^*, Z^*) = (10, 10, 0)$ com $F^* = 150$. Como todas as variáveia não básicas têm o valor 0 na linha de $-F$, isso indica que se trata de uma solução única.

FIM