Questão 1:

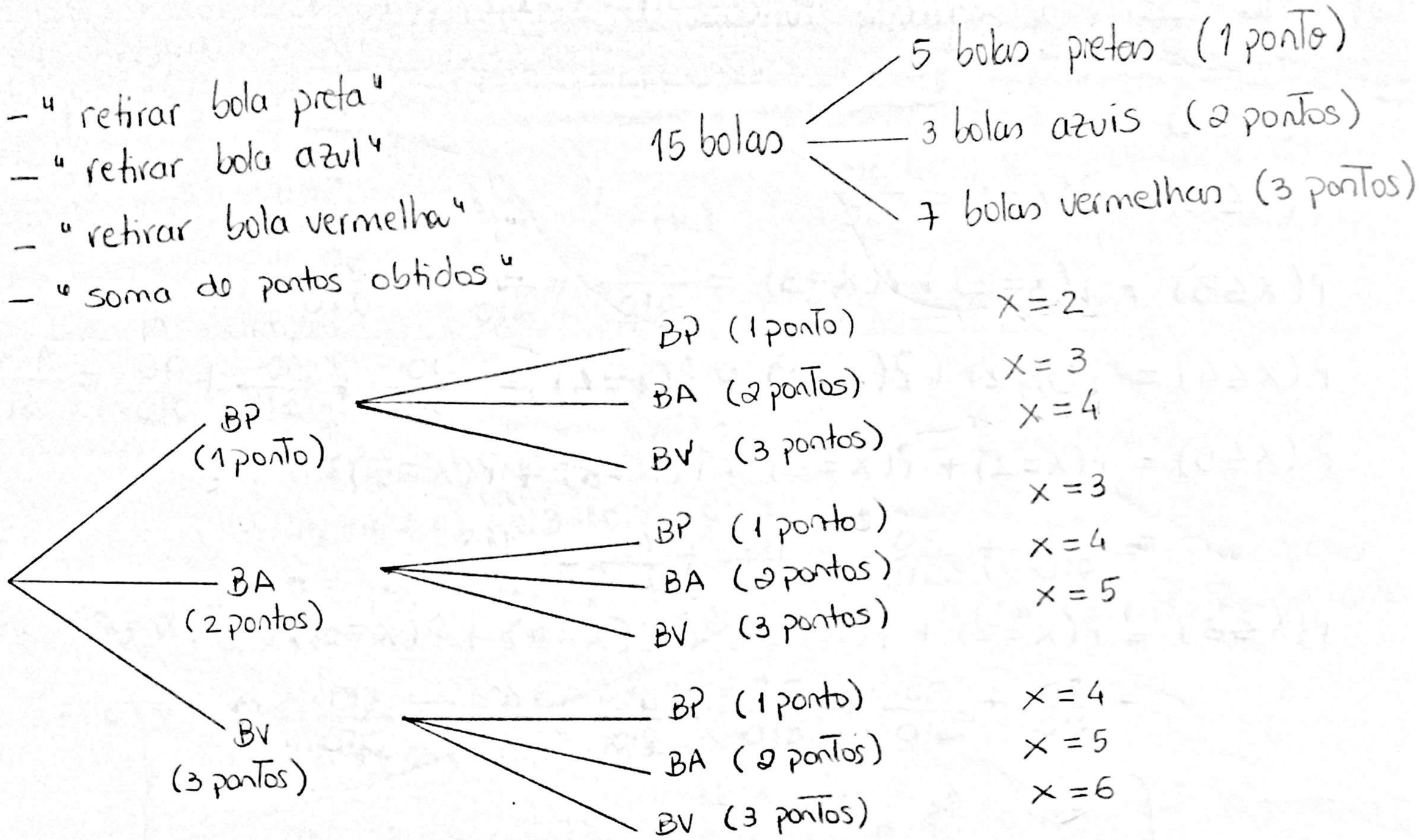
1.1.

BP – "retirar bola preta"

BA – "retirar bola azul"

BV – "retirar bola vermelha"

X – "soma de pontos obtidos"



$$P(X=2) = P(BP) \times P(BP) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{20}{210}$$

$$P(X=3) = P(BP) \times P(BA) + P(BA) \times P(BP) = \frac{5}{15} \times \frac{3}{14} + \frac{3}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{15}{210} + \frac{15}{210}$$

$$= \frac{30}{210}$$

$$P(X=4) = P(BP) \times P(BV) + P(BA) \times P(BA) + P(BV) \times P(BP)$$

$$= \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{35}{210} + \frac{6}{210} + \frac{35}{210} = \frac{76}{210}$$

$$P(X=5) = P(BA) \times P(BV) + P(BV) \times P(BA) = \frac{3}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{14}$$

$$= \frac{21}{210} + \frac{21}{210} = \frac{42}{210}$$

$$P(X=6) = P(BV) \times P(BV) = \frac{42}{210}$$

Obtem-se a seguinte função de probabilidade

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{20}{210}$	$\frac{30}{210}$	$\frac{76}{210}$	$\frac{42}{210}$	$\frac{42}{210}$

Pela definição D3.6. do livro da UC tem-se que: $F(x) = P(X \leq x) = \sum f(x_i)$, obtem-se assim a seguinte Função de Distribuição

$$P(X<2) = 0$$

$$P(X \leq 2) = P(X=2) = \frac{20}{210}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{20}{210} + \frac{30}{210} = \frac{50}{210}$$

$$P(X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{20}{210} + \frac{30}{210} + \frac{76}{210} = \frac{126}{210}$$

$$P(X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{20}{210} + \frac{30}{210} + \frac{76}{210} + \frac{42}{210} = \frac{168}{210}$$

$$P(X \leq 6) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{20}{210} + \frac{30}{210} + \frac{76}{210} + \frac{42}{210} + \frac{42}{210} = \frac{210}{210} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{20}{210} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \frac{50}{210} & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ \frac{126}{210} & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ \frac{168}{210} & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

1.2. $$P(X>3 \mid X<6) = \frac{P(X>3 \cap X<6)}{P(X<6)} = \frac{P(3<X<6)}{P(X<6)} = \frac{P(X=4)+P(X=5)}{P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)}$$

$$= \frac{\frac{76}{210} + \frac{42}{210}}{\frac{20}{210} + \frac{30}{210} + \frac{76}{210} + \frac{42}{210}} = \frac{\frac{118}{210}}{\frac{168}{210}} = \frac{118 \times 210}{210 \times 168} = \frac{24780}{35280} \simeq 0{,}702$$

Resolução Alternativa

$$P(X>3 \mid X<6) = \frac{P(X>3 \cap X<6)}{P(X<6)} = \frac{P(3<X<6)}{P(X<6)} = \frac{F(5)-F(3)}{F(5)} = \frac{\frac{168}{210} - \frac{50}{210}}{\frac{168}{210}}$$

$$= \frac{\frac{118}{210}}{\frac{168}{210}} = \frac{118 \times 210}{210 \times 168} = \frac{24780}{35280} \simeq 0{,}702$$

Questão 2:

2.1. Pela definição D3.17 do livro da UC o valor médio de uma variável aleatória discreta obtem-se através da seguinte formula:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$$

Logo tem-se que:

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \sum x_i f(x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2) \times 0{,}1 + (-1) \times a + 0 \times b + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2 + (-a) + 0{,}3 + 0{,}2 = 0 \Leftrightarrow -a = 0 + 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow a = -0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 \Leftrightarrow a = 0{,}3$$

Pela definição D3.5 do livro da UC sabe-se que $\sum f(x_i) = 1$, logo tem-se:

$$\sum f(x_i) = 1 \Leftrightarrow 0{,}1 + 0{,}3 + b + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - 0{,}1 - 0{,}3 - 0{,}3 - 0{,}1 \Leftrightarrow b = 0{,}2$$

Para que $E(X) = 0$, a incognita a e b terão o valor de 0,3 e 0,2 respectivamente.

2.2. Tal como referido na alínea anterior o valor médio de uma variável discreta é dado por: $E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$.

Pela definição D3.24 do livro da UC sabe-se que a variância de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

Logo para $a = b = 0{,}25$ tem-se:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = (-2) \times 0{,}1 + (-1) \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}1$$

$$= -0{,}2 - 0{,}25 + 0 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}05$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$= (-2 - 0{,}05)^2 0{,}1 + (-1 - 0{,}05)^2 0{,}25 + (0 - 0{,}05)^2 0{,}25 + (1 - 0{,}05)^2 0{,}3$$

$$+ (2 - 0{,}05)^2 0{,}1$$

$$= 0{,}42025 + 0{,}275625 + 0{,}000625 + 0{,}27075 + 0{,}38025$$

$$= 1{,}3475$$

Questão 3: Esta resolução não está correta pois embora A e B sejam independentes e sigam uma distribuição de Poisson, $xA + yB$ não segue.

3.1. Seja X o número de erros por página. Sabe-se que $X \sim Po(\lambda)$.

A – "edição do jornal pela empresa A" $P(A) = 0,6$

B – "edição do jornal pela empresa B" $P(B) = 0,4$

Sabe-se tambem que:

X_A (número de erros por página na edição feita por A) $\sim Po(0,2)$

X_B (número de erros por página na edição feita por B) $\sim Po(0,3)$

Pelo Teorema da aditividade da distribuição de Poisson, sabe-se que se A e B são independentes $\sum_{i=1}^{k} x_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$ (Teorema T5.3 do livro da UC). Logo tem-se que

$X \sim P(0,6 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4)$ logo $X \sim P(0,24)$

Sabe-se que a função de uma distribuição de Poisson de parâmetro λ é dada por: $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$ (definição D5.5 do livro da UC)

$$P(X=0) = \frac{e^{-0,24} \cdot 0,24^{0}}{0!} \simeq 0,7867$$

Logo conclui-se que 78,67% do jornal não apresenta erros

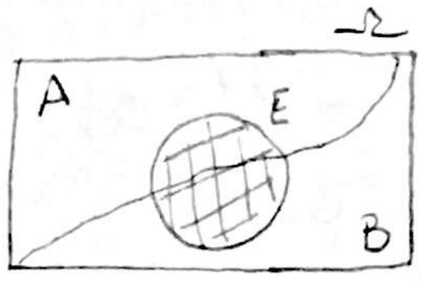
Questão 3:

3.1. <u>NOTA</u>: A combinação linear de Poissons não é uma Poisson.

Considera-se as seguintes variáveis, X - "número de erros por página", $X \sim Po(\lambda)$; e E - "existe erro".

Empresa A: $X_1 \sim P(0,2)$; $P(A) = 0,6$

Empresa B: $X_2 \sim P(0,3)$; $P(B) = 0,4$



Pretende-se saber a probabilidade de não existir erro, $P(\bar{E})$.

Pelo teorema T2.3 do livro da UC tem-se que: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Pelo teorema da probabilidade total (teorema T2.9 do livro da UC) tem-se:

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,6 \times 0,1813 + 0,4 \times 0,2592 = 0,21246$$

Cálculo auxiliar:

$$P(X_1 = 0) = \frac{e^{-0,2} \times 0,2^0}{0!} \simeq 0,8187$$

$$P(X_2 = 0) = \frac{e^{-0,3} \times 0,3^0}{0!} \simeq 0,7408$$

$$P(E|A) = P(X_1 > 0) = 1 - P(X_1 \leq 0) = 1 - F_{X_1}(0) = 1 - 0,8187 = 0,1813$$

$$P(E|B) = P(X_2 > 0) = 1 - P(X_2 \leq 0) = 1 - F_{X_2}(0) = 1 - 0,7408 = 0,2592$$

Logo se $P(E) = 0,21246$, tem-se que:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,21246 = 0,78754$$

Logo conclui-se que, aproximadamente 78,754% do jornal não apresenta erros.

3.2. A probabilidade pedida é $P(B|\bar{E})$, pelo Teorema de Bayes (T2.10 do livro da UC) tem-se:

$$P(B|\bar{E}) = \frac{P(B)P(\bar{E}|B)}{P(\bar{E})} = \frac{P(B)(1 - P(E|B))}{P(\bar{E})} = \frac{0,4 \times (1 - 0,2592)}{0,78754} \simeq 0,37626$$

Logo a probabilidade de uma página sem erros ter sido editada pela empresa B é, de aproximadamente, 0,376.

3.2. (Resolução Alternativa)

A probabilidade pedida é $P(B|X=0)$, pela definição da probabilidade condicional tem-se que:

$$P(B|X=0) = \frac{P(B \cap X=0)}{P(X=0)} = \frac{P(X_B=0)\,P(B)}{P(X=0)} = \frac{0{,}7408 \times 0{,}4}{0{,}78754} = \frac{0{,}29632}{0{,}78754}$$

$$\simeq 0{,}37626$$

Logo a probabilidade de uma página sem erros ter sido editada pela empresa B é de, aproximadamente 0,376.

<u>Critérios de correção</u>:

Identificar a probabilidade pedida (0,1 valores)

Aplicar a probabilidade condicional (0,1 valores)

Obter $P(X_B=0)$ (0,1 valores)

Obter $P(B)$ (0,1 valores)

Resultado Final (0,1 valores)

Questão 4:

Pelo Teorema T3.2. do livro da UC

$$\mathrm{var}(cX+d) = E((cX+d)^2) - (E(cX+d))^2$$

$$= E((cX)^2 + 2cXd + d^2) - [E(cX)]^2 + E(cX)E(d) + [E(d)]^2$$

$$= [E(cX)^2] + 2E(cdX) + E(d^2) - [E(cX)]^2 - E(cX)E(d) - [E(d)]^2$$

$$= [E(cX)^2] - [E(cX)]^2 + E(d^2) - E(d)^2 + 2[E(cdX) - E(cX)E(d)]$$

pelas propriedades do valor médio

$$= c^2E(X^2) - c^2E(X)^2 + d^2 - d^2 + 2[cd\,E(X) - cd\,E(X)]$$

pelo Teorema T3.2 do livro da UC.

$$= c^2[E(X^2) - E(X)^2] + 0 + 0$$

$$= c^2\,\mathrm{var}(X) \qquad \text{c.q.d.}$$

(Resolução alternativa)

$$\mathrm{var}(cX+d) = E[[(cX+d) - (c\mu+d)]^2], \text{ pois } E(cX+d) = c\mu + d$$

$$= E[c^2(X-\mu)^2]$$

$$= c^2E[(X-\mu)^2]$$

$$= c^2\,\mathrm{var}(X) \qquad \text{c.q.d.}$$

Critérios de Correção

Questão 1:

1.1. Identificar os acontecimentos (0,05 valores)
Identificar o espaço amostral da variavel aleatória X (0,10 valores).
Calcular as probabilidades (0,01 valores por probabilidade)
Determinar a função de probabilidade de X (0,125 valores)
Calcular as probabilidades (0,01 valores por probabilidade)
Determinar a função densidade de probabilidade (0,125 valores)

1.2. Aplicação do Teorema da Probabilidade Condicional (0,20 valores)
Obter a probabilidade $P(3<X<6)$ (0,10 valores)
Obter a probabilidade $P(X<6)$ (0,10 valores)
Resultado Final (0,10 valores)

Questão 2:

2.1. Indicar a fórmula de cálculo de $E(X)$ (0,1 valores)
Igualar $E(X)=0$ (0,06 valores)
Manipulação (0,06 valores)
Resultado final (0,06 valores)
Indicar que $\sum f(x_i)=1$ (0,1 valores)
Manipulação (0,06 valores)
Resultado Final (0,06 valores)

2.2. Indicar a expressão de $E(X)$ (0,1 valores)
Indicar a expressão de $\sigma^2(X)$ (0,1 valores)
Manipulação da formula de $E(X)$ (0,1 valores)
Manipulação da formula de $\sigma^2(X)$ (0,1 valores)
Resultado final de $E(X)$ (0,05 valores)
Resultado final de $\sigma^2(X)$ (0,05 valores)

Questão 3 :

3.1. Identificar acontecimentos e respectivas probabilidades (0,1 valores)
Definir as variáveis de interesse e a sua distribuição (0,1 valores)
Identificar a probabilidade pedida. (0,08 valores)
Aplicar o Teorema da Probabilidade Total (0,08 valores)
Determinar $P(X_1 = 0)$ (0,01 valores)
Determinar $P(X_2 = 0)$ (0,01 valores)
Determinar $P(E|A)$ (0,01 valores)
Determinar $P(E|B)$ (0,01 valores)
Resultado Final (0,1 valores)

3.2. Identificar a probabilidade pedida (0,2 valores)
Aplicar o Teorema de Bayes (0,2 valores)
Resultado Final (0,1 valores)

Questão 4:

Aplicação do Teorema T3.2. (0,25 valores)
Desenvolvimento dos casos notáveis (0,25 valores)
Aplicação das propriedades do valor médio (0,25 valores)
Obter o resultado esperado (0,25 valores)