Resolução do efólio B

Álgebra Linear I **Código:** 21002

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja $\mathcal{S} = ((1,-1,4),\ (0,1,-3),\ (1,0,1))$ uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^3$. Então:

☐ **a)** $\mathcal{S}$ é um conjunto gerador, mas não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

☐ **b)** $\mathcal{S}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, diferente da base canónica.

☐ **c)** $\mathcal{S}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

☒ **d)** $\dim\langle(1,-1,4),\ (0,1,-3),\ (1,0,1)\rangle < 3$.

2. Seja $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ uma matriz com apenas três valores próprios, com multiplicidades algébricas iguais e tal que o produto dos valores próprios satisfaz $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6$. Então:

☐ **a)** O polinómio característico de A pode ser $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

☐ **b)** Uma matriz A nestas condições nunca é invertível.

☒ **c)** Os valores próprios de A podem ter multiplicidades geométricas diferentes.

☐ **d)** $\det A = 6$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja A_α a matriz definida por $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, e considere as seguintes afirmações:

(i) A_α é diagonal para todo o α;

(ii) A_α é diagonalizável para algum α;

(iii) se o vetor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$ pertence ao núcleo de A_α então $\alpha = 1$;

(iv) o vetor $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$ é um vetor próprio de A_α para algum α.

Então as afirmações verdadeiras são:

☐ **a)** (i) e (ii) ☐ **c)** (iii) e (iv)

☐ **b)** (ii) e (iii) ☒ **d)** (ii) e (iv)

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz com polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, e considere as seguintes afirmações:

(i) A tem traço nulo;

(ii) A é diagonalizável;

(iii) $\det A = -1$;

(iv) A tem um subespaço próprio com dimensão 2.

Então a lista completa das afirmações verdadeiras é:

- ☐ **a)** (i) e (iii)
- ☐ **c)** (i), (ii) e (iv)
- ☐ **b)** (ii) e (iii)
- ☒ **d)** (i), (ii) e (iii)

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se u é um vetor próprio de A então u é também um vetor próprio de A^k para todo $k \geqslant 2$.

b) Se u é um vetor próprio de A^k para algum $k \geqslant 2$ então u é também um vetor próprio de A.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determine:

(i) O polinómio característica de A.

(ii) Uma base para cada um dos espaços próprios de A.

(iii) A multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

(iv) Diga, justificadamente, se a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal.

IV. Seja T um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T(e_1) = (1, 0, 1), \qquad T(e_2) = (2, 1, 2) \quad \text{e} \quad T(e_3) = (1, 1, 1),$$

onde $(e_1, e_2, e_3) = \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}$.

(i) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada.

(ii) Determine uma base do núcleo de T.

(iii) Determine a dimensão da imagem de T.

(iv) Verifique que

$$\mathcal{B} = ((-1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, -1, 0))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ e determine a matriz $\mathcal{C} = \mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base $\mathcal{B}$ no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

V. Para cada $n \geqslant 2$, seja $J_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a matriz que tem todas as suas entradas iguais a 1, ou seja $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Determine os valores próprios e os espaços próprios de J_n.

(*Sugestão*: Comece por justificar que um dos valores próprios é $\lambda = 0$ e determine a dimensão do espaço próprio associado E_0.)

FIM

Grupo I.
1.
Uma vez que somando os 2 primeiros vetores de $\mathcal{S}$ se obtem o terceiro vetor, e portanto

$$(1,-1,4)+(0,1,-3)-(1,0,1)=\mathbf{0},$$

que é uma combinação linear nula, com coeficientes não todos nulos, a sequência de vetores é linearmente dependente. Assim, como estamos em $\mathbb{R}^3$ que é um espaço de dimensão 3, concluimos que $\mathcal{S}$ não é uma base (nem um conjunto gerador), e portanto a dimensão do espaço gerado por $\mathcal{S}$ é certamente menor que a dimensão de $\mathbb{R}^3$.
Uma outra forma de concluir que os 3 vetores de $\mathcal{S}$ não são linearmente independentes é através do cálculo do determinante da matriz cujas linhas (ou colunas) são os vetores de $\mathcal{S}$. Neste caso

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1+3-4=0.$$

A alínea correta é **d)**.

2.
A matriz A é uma matriz de ordem 6, e portanto a soma das multiplicidades algébricas dos seus 3 valores próprios é igual a 6, e portanto a multiplicidade algébrica de cada valor próprio é igual a 2. Como A é uma matriz de ordem 6, o seu polinómio característico é de grau 6; como 0 não é valor próprio, a matriz A é uma matriz invertível; como $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=6$ e cada valor próprio tem multiplicidade algébrica igual a 2, tem-se $\det A=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2=36$.

Assim a alínea correta é **c)**.

3. Como a matriz A_α tem elementos não nulos fora da diagonal principal, é claro que não é diagonal para nenhum α.

Para vermos se A_α é diagonalizável vamos calcular os seus valores próprios:

$$\begin{aligned}\det(A_\alpha-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha-\lambda)(1-\lambda)(\alpha-\lambda)-(1-\lambda)=(1-\lambda)[(\alpha-\lambda)^2-1] \\ &= (1-\lambda)(\alpha-\lambda-1)(\alpha-\lambda+1) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-(\alpha+1))(\lambda-(\alpha-1)),\end{aligned}$$

e portanto os valores próprios de A_α são $1,\alpha+1$ e $\alpha-1$. Escolhendo, por exemplo $\alpha=3$, obtemos 3 valores próprios diferentes, $1,4$ e 2, e portanto A_3 é diagonalizável.

O vetor $(101)^\top$ está no núcleo de $A_\alpha \iff A_\alpha(101)^\top=0 \iff \alpha=-1$.

Como $A_\alpha(010)^\top=(010)^\top$, concluímos que $(010)^\top$ é um vetor de A_α para todo o α com vetor próprio associado $\lambda=1$.

A alínea correta é **d)**.

4.
Como $p(\lambda)=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$ concluimos que os valores próprios de A são 1 e -1, e portanto $\operatorname{Tr}A=1-1=0$ e $\det A=1\times(-1)=-1$. Além disso como A é de ordem 2 e tem 2 valores próprios distintos, é diagonalizável. Como A é de ordem 2 e tem 2 valores próprios distintos, cada um deles tem um espaço próprio de dimensão 1.

A alínea correta é **d)**.

Grupo II.

a) Se u é um vetor próprio de A com valor próprio λ, então $Au = \lambda u$, e aplicando A aos dois lados desta igualdade tem-se $A(Au) = A(\lambda u)$ ou seja $A^2u = \lambda(Au) = \lambda(\lambda u) = \lambda^2 u$, e podemos conjeturar que $A^k u = \lambda^k u$ para $k \geqslant 1$.

Usando o método de indução para mostrar a nossa conjetura, temos de provar o seguinte:

$$A^n u = \lambda^n u \Rightarrow A^{n+1}u = \lambda^{n+1}u.$$

Usando a hipótese de indução

$$A^{n+1}u = A(A^n u) = A(\lambda^n u) = \lambda^n(Au) = \lambda^n(\lambda u) = \lambda^{n+1}u,$$

e portanto a afirmação é verdadeira.

b) Para vermos porque é que esta afirmação é falsa podemos recordar que existem matrizes não identicamente nulas tais que $A^2 = 0$. Isso quer dizer que qualquer vetor não nulo é um vetor próprio de A^2 com valor próprio 0, e em geral esse vetor próprio de A^2 não é um vetor próprio de A. Um exemplo simples de uma matriz 2×2 nessa condições é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, e portanto $u = (0\ 1)^\top$ é um vetor próprio de A^2 com valor próprio 0 pois $A^2u = 0u = 0$, mas $Au = (1\ 0)^\top \neq \lambda u,\ \forall\lambda$. Logo u não pode ser vetor próprio de A, e portanto a afirmação é falsa.

Grupo III.

(i) Por definição o polinómio característico de A é o determinante da matriz $A - \lambda I_3$. Como a matriz $A - \lambda I_3$ é uma matriz triangular, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Também podiamos aplicar o Teorema de Laplace à 1ª coluna. Assim,

$$p_A(\lambda) = p(\lambda) = (-1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = (-1-\lambda)^2(3-\lambda) = -(\lambda-(-1))^2(\lambda-3).$$

(ii) Uma vez que os valores próprios são as raízes da equação característica $p(\lambda) = 0$ concluímos imediatamente da alínea anterior que os valores próprios de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$, e que a multiplicidade algébrica (m.a) de -1 é igual a 2 e a de 3 é igual a 1.

Por definição o espaço próprio associado a um valor próprio λ é igual ao espaço linear das soluções da equação $(A - \lambda I_3)x = 0$.

Para $\lambda_1 = -1$ tem-se $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e portanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim o espaço próprio associado a $\lambda_1 = -1$ é o espaço linear $E_{\lambda_1} = E_{-1}$ gerado pelo vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De modo inteiramente análogo para $\lambda_2 = 3$ tem-se $A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e portanto

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x + y = 0 \\ -4y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff z = 4y = 16x \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Assim o espaço próprio associado a $\lambda_2 = 3$ é o espaço linear $E_{\lambda_2} = E_3$ gerado pelo vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$.

(iii) Como a multiplicidade geométrica (m.g) de um valor próprio é a dimensão do seu espaço próprio, e cada um dos espaços próprios anteriores é gerado por um único vetor, temos que

$$\text{m.g}(-1) = 1 = \text{m.g}(3).$$

(iv) A é semelhante a uma matriz diagonal se e sómente se for diagonalizável, e podemos utilizar a Prop. 6.35 (3ª Ed.) ou a Prop. 6.36 (3ª Ed.), para mostrar que A não é diagonalizável.

A Prop. 6.35 diz-nos que a matriz A de ordem $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ é diagonalizável se e só se tiver **3** vetores próprios linearmente independentes, o que é impossível neste caso, pois A apenas tem 2 vetores próprios.

A Prop. 6.36 diz-nos que a matriz A de ordem $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ é diagonalizável se e só se a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios for igual a **3**, mas neste caso tem-se $1 + 1 = 2 \neq 3$.

Grupo IV.

(i) A matriz $A = \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada é a matriz que tem por colunas as imagens por T dos vetores da base, ou seja é a matriz cujas colunas são $T(e_1), T(e_2)$e $T(e_3)$, portanto

$$A = \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) O o núcleo de T é constituído pelas soluções do sistema $Ax = 0$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + -y = 0 \\ z = -y \end{cases} \iff x = z = -y,$$

e portanto o núcleo é um espaço linear gerado pelo vetor $(1, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, logo $\dim \text{Nuc } T = 1$.

(iii) O Teorema da Dimensão diz-nos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } T + \dim \text{Im}T$, neste caso $3 = 1 + \dim \text{Im}T$ e portanto $\dim \text{Im}T = 3 - 1 = 2$.

(iv) Para verificar que $\mathcal{B} = ((-1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, -1, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ basta mostrar que os três vetores são linearmente independentes, pois num espaço de dimensão 3, quaisquer três vetores linearmente independentes são também geradores.

Para vermos que os três vetores são linearmente independentes basta, por exemplo, mostrar que o determinante da matriz cujas colunas (ou linhas) são estes 3 vetores é não nulo. Tem-se

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2 \neq 0.$$

Para determinar a matriz $\mathcal{C} = \mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base $\mathcal{B}$ no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada vamos utilizar dois métodos distintos.

O primeiro consiste em escrever os vetores da base $\mathcal{B}$ à custa dos vetores da base canónica, ou seja como combinação linear dos três vetores (e_1, e_2, e_3) e depois calcular a sua imagem por T. Tem-se $(-1,0,1) = -(1,0,0) + (0,0,1) = -e_1 + e_3$, e portanto

$$T((-1,0,1)) = T(-e_1 + e_3) = -T(e_1) + T(e_3) = -(1,0,1) + (1,1,1) = (0,1,0).$$

Para $(0,1,1)$ tem-se $(0,1,1) = e_2 + e_3$ e portanto

$$T((0,1,1)) = T(e_2 + e_3) = T(e_2) + T(e_3) = (2,1,2) + (1,1,1) = (3,2,3).$$

Para $(1,-1,0)$ tem-se $(1,-1,0) = e_1 - e_2$ e portanto

$$T((1,-1,0)) = T(e_1 - e_2) = T(e_1) - T(e_2) = (1,0,1) - (2,1,2) = (-1,-1,-1),$$

e portanto

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

O outro método consiste em usar matrizes de mudança de base, começando por determinar a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}$, ou seja $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$, e depois usar a Prop. 5.42, neste caso simples, em que os espaços de partida e de chagada são $\mathbb{R}^3$.
Com a ajuda do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\text{id}_{\mathbb{R}^3}", "\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})"'] \arrow[rr, bend right, "T", "\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})"'] & \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "T", "\mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})"'] & \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

tem-se $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})\, \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$.
Designando os vetores da base $\mathcal{B}$ por (u, v, w), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{id}_{\mathbb{R}^3}(u) &= (-1,0,1) = -(1,0,0) + (0,0,1) = (-1)e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\
\text{id}_{\mathbb{R}^3}(v) &= (0,1,1) = (0,1,0) + (0,0,1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\
\text{id}_{\mathbb{R}^3}(w) &= (1,-1,0) = (0,1,0) + (0,0,1) = 1e_1 + (-1)e_2 + 0e_3,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) &= \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})\, \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Grupo V.
Uma vez que J_n tem duas linhas iguais, a Prop. 3.12 garante que o seu determinante é nulo. Como pela Prop. 6.20 o determinante de J_n é igual ao produto dos valores próprios, concluímos que 0 é valor próprio de J_n.
O espaço próprio associado ao valor próprio 0, E_0, corresponde ao núcleo de J_n (pois $J_n - 0I_n = J_n$). Pela Prop. 4.64 ou 4.66, por exemplo, a matriz J_n tem característica 1, e portanto, pela Prop. 4.69, o seu núcleo tem dimensão $n - \mathrm{r}(J_n) = n - 1$.
O valor próprio 0 tem multiplicidade algébrica no mínimo igual à multiplicidade geométrica, e portanto existe no máximo mais um valor próprio.
Calculando $\det(J_n - \lambda I_n)$ já sabemos que vai ser um múltiplo de λ^{n-1}.
Para determinar o outro valor próprio vamos calcular o determinante de $J_n - \lambda I_n$, efetuando transformações nas linhas e nas colunas que não alteram o valor do determinante,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \cdots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

onde a primeira transformação consiste em somar à primeira linha cada uma das outras linhas ($l_1 + l_2, \ldots, l_1 + l_n$), e a segunda transformação consiste em somar a cada coluna, diferente da primeira, o simétrico da primeira coluna ($c_2 - c_1, \ldots, c_n - c_1$). esta última matriz é triangular e portanto o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal,

$$\begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda)^{n-1}(n-\lambda).$$

Concluimos assim que o outro valor próprio é $\lambda = n$, com multiplicidade algébrica (e geométrica) igual a 1.
O espaço próprio associado a $\lambda = n$ é o núcleo da matriz

$$J_n - nI_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix},$$

ou de maneira mais sugestiva, consiste nas soluções de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Como já sabemos que o valor próprio é $\lambda = n$ tem multiplicidade geométrica igual a 1, basta-nos obter uma solução não nula, por exemplo o vetor definido por $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, e este vetor gera o espaço próprio do valor próprio n.

FIM