E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: Pedro Pereira Santos

N^0 de Estudante: 2000809

Curso: Licenciatura em Eng. Informática **Turma:** 2

Data: 21/05/2023 **Ano Lectivo:** 2022/2023

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Clarence Protin

Declaro que terminei o e-Fólio até à data e hora determinada pelo professor.

Resolução:

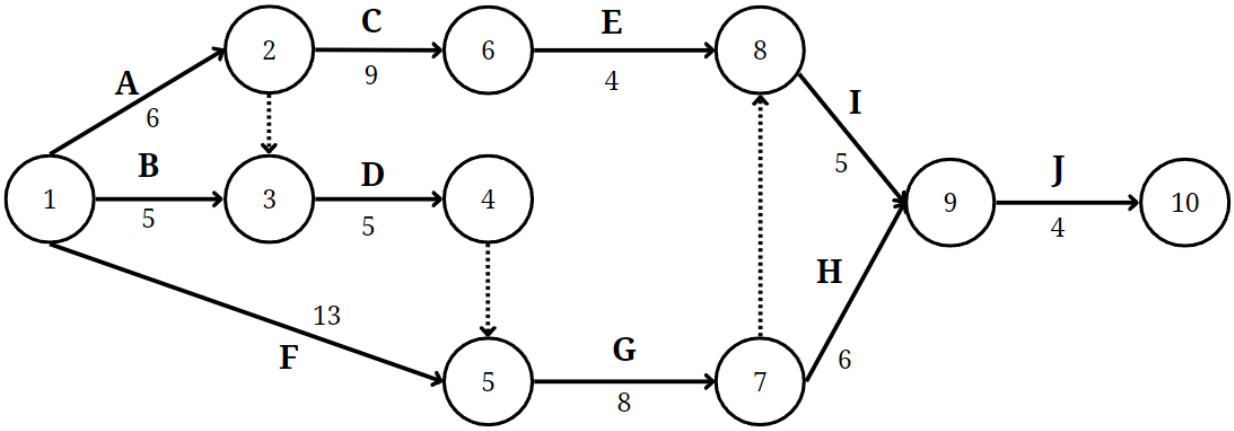
1. **As unidades de tempo para este exercício estão todas em horas!**

Começamos por fazer um diagrama de atividades, indicando com nós os acontecimentos (fim de algumas atividades e inicio de outras) e as atividades entre os nós i e j por setas.

Segundo a tabela fornecida,

Atividades	Precedências	Duração (horas)
A	—	6
B	—	5
C	A	9
D	A, B	5
E	C	4
F	—	13
G	D, F	8
H	G	6
I	E, G	5
J	H, I	4

Onde A = (1,2) ,B = (1,3), C = (2,4), etc.
Temos então o diagrama de atividades, com as linhas a tracejado indicando as atividades fictícias:



A seguir, fazemos um Quadro para a determinação de caminho crítico, incluindo folgas, para termos os dados organizados. Para isto precisamos de calcular primeiro os Tempos Mais Cedo (TMC) e Tempos Mais Tarde (TMT), com a duração das Atividades ($D_{i,j}$ com i,j = nós i e j).

Temos então (com as unidades de tempo em horas):
$TMC_j = máx\{TMC_i + D_{i,j}\}$, para todo nó i origem de atividades que convirjam do nó j
$TMT_i = máx\{TMT_j + D_{i,j}\}$, para todo nó j destino de atividades que partam do nó i

Como o nó inicial é o 1 onde tempo = 0 , temos que $TMC_1 = 0$. Temos, também que, as atividades ficticias não consomem tempo. Logo,

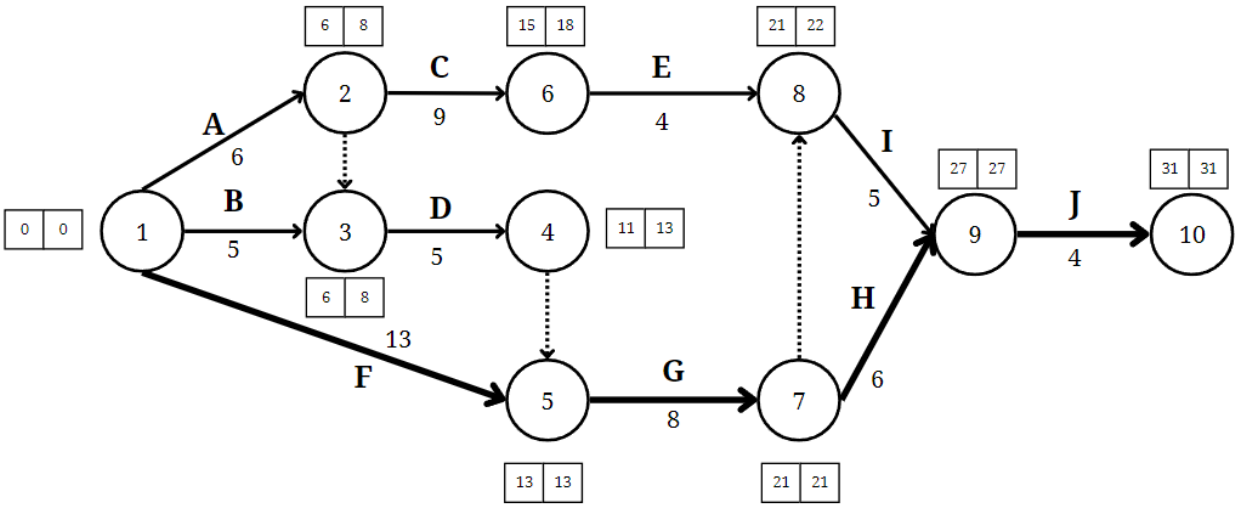
$TMC_2 = TMC_1 + D_{1,2} = 0 + 6 = 6$
$TMC_3 = máx\{TMC_1 + D_{1,3} , TMC_2 + D_{2,3}\} = máx\{0 + 5 , 6 + 0\} = 6$
$TMC_4 = TMC_3 + D_{3,4} = 6 + 5 = 11$
$TMC_5 = máx\{TMC_1 + D_{1,5} , TMC\ 4 + D_{4,5} = máx\{0 + 13 ,11 + 0\} = 13$

$TMC_6 = TMC_2 + D_{2,6} = 6 + 9 = 15$
$TMC_7 = TMC_5 + D_{5,7} = 13 + 8 = 21$
$TMC_8 = máx\{TMC_6 + D_{6,8} , TMC_7 + D_{7,8} \} = máx\{15 + 4 , 21 + 0\} = 21$
$TMC_9 = máx\{TMC_7 + D_{7,9} , TMC_8 + D_{8,9} \} = máx\{21 + 6 , 21 + 5\} = 27$
$TMC_{10} = TMC_9 + D_{9,10} = 27 + 4 = 31$

Para calcular o Tempo Mais Tarde, primeiro assumimos que o TMT do nó final é igual ao seu TMC. Temos então, com $TMT_{10} = TMC_{10} = 31$,

$TMT_9 = TMT_{10} - D_{9,10} = 31 - 4 = 27$
$TMT_8 = TMT_9 - D_{8,9} = 27 - 5 = 22$
$TMT_7 = mín\{TMT_9 - D_{7,9} , TMT_8 - D_{7,8}\} = \{27 - 6 , 22 - 0\} = 21$
$TMT_6 = TMT_8 - D_{6,8} = 22 - 4 = 18$
$TMT_5 = TMT_7 - D_{5,7} = 21 - 8 = 13$
$TMT_4 = TMT_5 - D_{4,5} = 13 - 0 = 13$
$TMT_3 = TMT_4 - D_{3,4} = 13 - 5 = 8$
$TMT_2 = mín\{TMT_3 - D_{2,3} , TMT_6 - D_{2,6}\} = mín\{8 - 0 , 18 - 9\} = 8$
$TMT_1 = mín\{TMT_2 - D_{1,2} , TMT_3 - D_{1,3} , TMT_5 – D_{1,5}\} = mín\{8 - 6, 8 - 5, 13 - 13\} = 0$

Obtemos, então, a rede CPM do projeto:



a)

Temos que, segundo os dados obtidos, o Tempo Mais Cedo do ultimo nó é 31 horas, ou seja, o menor tempo necessário para concluir o projeto é de 31 horas. Como 31 horas > 30 horas, temos que o grupo de investigação não consegue cumprir o prazo por 1 hora.

b)

Para sabermos quais são as atividades criticas, temos que, elas têm de obedecer a 3 critérios:

$TMC_i = TMT_i$
$TMC_j = TMT_j$
$TMC_j - TMC_i = TMT_j - TMT_i = D_{i,j}$

Calculando estes critérios para todas as atividades, segundo os resultados já obtidos,

temos:

Atividade A (1,2):
0 = 0
6 = 8
6 = 8 = 6

Atividade B (1,3):
0 = 0
6 = 8
6 = 8 = 5

Atividade C (2,4):
6 = 9
15 = 18
9 = 9 = 9

Atividade D (3.5):
6 = 8
11 = 13
5 = 5 = 5

Atividade E (4,6):
15 = 18
21 = 22
6 = 4 = 4

Atividade F (1,7):
0 = 0
13 = 13
13 = 13 = 13

Atividade G (7,8):
13 = 13
21 = 21
8 = 8 = 8

Atividade H (8,9):
21 = 21
27 = 27
6 = 6 = 6

Atividade I (9,10):
21 = 22
27 = 27
6 = 6 = 5

Atividade J (10,11):
27 = 27
31 = 31
4 = 4 = 4

Podemos, então ver que, segundo os cálculos e a própria definição de atividade crítica, elas são as atividades F, G, H e J, sendo 1-5-7-9-10 o caminho crítico.

c)

Precisamos agora de saber qual a folga total de cada atividade.
Para isso, temos que, a folga total FT obtem-se segundo a seguinte fórmula:

$FT_{i,j} = TMT_{j} - TMC_{i} - D_{i,j}$

Temos então, para cada atividade de A a J, as seguintes folgas:

Atividade A: $FT_{1,2} = TMT_{2} - TMC_{1} – D_{1,2} = 8 - 0 - 6 = 2$
Atividade B: $FT_{1,3} = TMT_{3} - TMC_{1} – D_{1,3} = 8 - 0 - 5 = 3$
Atividade C: $FT_{2,6} = TMT_{6} - TMC_{2} – D_{2,6} = 18 - 6 - 9 = 3$
Atividade D: $FT_{3,4} = TMT_{4} - TMC_{3} – D_{3,4} = 13 - 6 - 5 = 2$
Atividade E: $FT_{6,8} = TMT_{8} - TMC_{6} – D_{6,8} = 22 - 15 - 4 = 3$
Atividade F: $FT_{1,5} = TMT_{5} - TMC_{1} – D_{1,5} = 13 - 0 - 13 = 0$
Atividade G: $FT_{5,7} = TMT_{7} - TMC_{5} – D_{5,7} = 21 - 13 - 8 = 0$
Atividade H: $FT_{7,9} = TMT_{9} - TMC_{7} – D_{7.8} = 21 - 21 - 6 = 0$
Atividade I: $FT_{8,9} = TMT_{9} - TMC_{8} – D_{8,9} = 27 - 21 - 5 = 1$
Atividade J: $FT_{9,10} = TMT_{10} - TMC_{9} – D_{9,10} = 31 - 27 - 4 = 0$

i.

Com os dados obtidos, podemos ver que a folga total da Atividade D é de 2 horas, confirmando que esta não é uma atividade crítica, logo, se ela iniciar 2 horas mais tarde, como a folga total é de 2 horas, não irá, neste caso, afetar a duração total do projeto, acabando a atividade mesmo a tempo para iniciar a tarefa G, caso F não tenha atrasos.

ii.

Temos que 25% de 5 horas são 1,25 horas. Como 1,25 horas é maior do que 1 hora, temos que se esta tarefa demorar mais 25% de tempo, irá atrasar o projeto, caso não existam mais atrasos, em 1 horas - 1,25 horas = 0,25 horas = 15 minutos o tempo total do projeto, sendo necessário, no mínimo, 31 horas + 0,25 horas = 31,25 horas para acabar o projeto.

iii.

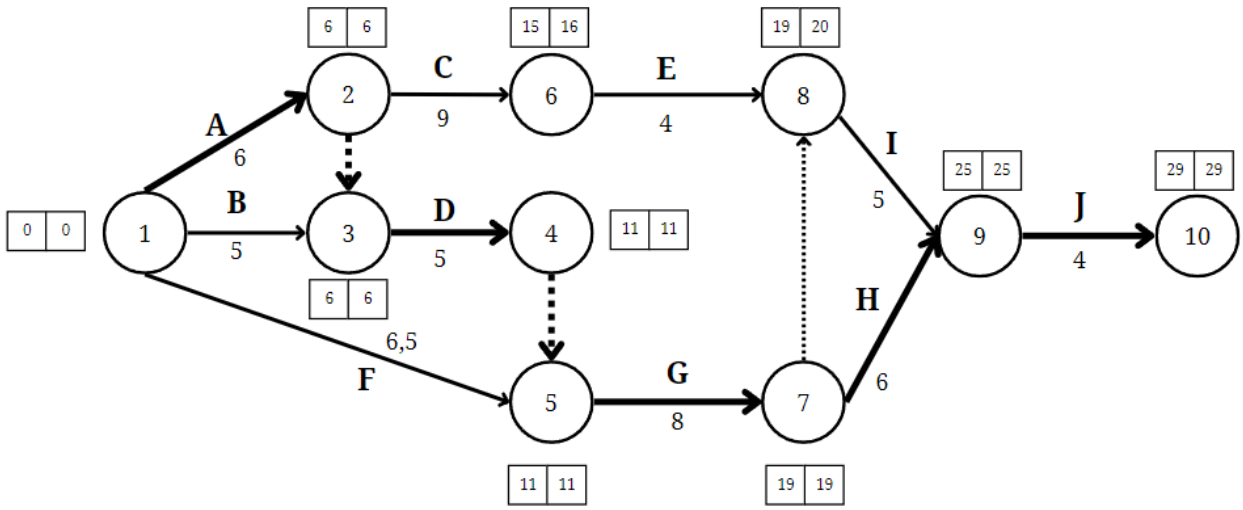
Como, pelos dados obtidos até agora, podemos ver que a tarefa F é uma atividade crítica.

Se a tarefa F demorar 50% do tempo previsto, demorará $\mathbf{13 * \frac{1}{2} = 6,5}$ horas. Como F é uma atividade critica, isto iria alterar os TMC, TMT e FT dos nós seguintes.

Temos então, para os nós em que TMC irá alterar:

TMC $_5$ = máx{TMC $_0$ + $D_{0,5}$, TMC 4 + $D_{4,5}$ = máx{0 + 6,5 ,11 + 0} = 11
TMC $_7$ TMC $_5$ + $D_{5,7}$ = 11 + 8 = 19
TMC $_8$ = máx{TMC $_6$ + $D_{6,8}$, TMC $_7$ + $D_{7,8}$ } = máx{15 + 4 , 19 + 0} = 19
TMC $_9$ = máx{TMC $_7$ + $D_{7,9}$, TMC $_8$ + $D_{8,9}$ } = máx{19 + 6 , 19 + 5} = 25
TMC $_{10}$ = TMC $_9$ + $D_{9,10}$ = 25 + 4 = 29

Isto alteraria, também, todos os TMT e as FT, e aplicando os cálculos necessários, de modo análogo aos anteriores, obtemos, então, a nova rede CPM do projeto:



Posto isto, caso a atividade F demore 50% do tempo previsto, obtemos um novo caminho crítico 1-2-3-4-5-7-9-10 pelas atividades A-D-G-H-J. Caso não haja nenhum atraso, ou este seja no máximo de 1 hora espalhado pelas atividades do caminho crítico, o grupo de investigação conseguirá cumprir o prazo de 30 horas do projeto, acabando, sem atrasos, em 29 horas, todas as atividades(TMC $_{10}$ = 29).

2)

a)

Pelos dados, temos então, um sistema M/M/2 com λ = 12 e μ = $\frac{1*60\ min}{12\ min}$ = 5, logo o fator de utilização, ou taxa de ocupação, ρ é dado por:

ρ = $\frac{\lambda}{s*\mu}$ = $\frac{12}{2*5}$ = $\frac{6}{5}$ > 1

Como o fator de utilização é superior a 1, o ritmo de chegadas é superior à capacidade de atendimento, pelo que o sistema numa atingirá uma situação de equilíbrio, aumentando cada vez mais a fila de espera.

Caso tivessemos 3 funcionários temos:

ρ = $\frac{\lambda}{s*\mu}$ = $\frac{12}{3*5}$ = $\frac{4}{5}$ < 1, onde o fator de utilização já seria inferior a 1, onde o sistema poderá atingir uma situação de equilíbrio, pois a capacidade de atendimento seria superior ao ritmo de chegada. As condições de estado estacionário acabariam por prevalecer.

Posto isto, o funcionário tem razão, pois apenas a partir dos 3 funcionários ρ seria inferior a 1.

b)

Para um cliente não ter de esperar, neste caso, tem de haver no mínimo 1 funcionário livre.

Como para 2 funcionários, ρ é maior que 1, isto não passaria.

Para 3 funcionários teriamos que calcular a probabilidade de pelos menos 1 deles estar livre, ou seja, a probabilidade de estarem menos de 3 clientes no sistema, que é a probabilidade de um cliente que chegue não esperar na fila ($P_{\text{não esperar na fila}}$ = 1 - $P_{\text{esperar na fila}}$ <=> $P_{\text{esperar na fila}}$ = 1 - $P_{\text{não esperar na fila}}$).

Temos que $P_{<3} = P_0 + P_1 + P_2$. Logo, os seus valores, com ρ = $\frac{\lambda}{s*\mu}$ = $\frac{12}{3*5}$ = $\frac{4}{5}$, são:

$$\frac{1}{P0} = \frac{(s^s\rho^{s+1})}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s}\frac{(s\rho)^n}{n!} = \frac{3^3\left(\frac{4}{5}\right)^{3+1}}{3!\left(1-\frac{4}{5}\right)} + \sum_{n=0}^{3}\frac{\left(3\frac{4}{5}\right)^n}{n!} = \frac{27*\frac{256}{625}}{\frac{6}{5}} + 1 + 2,4 + 2,88 + 2,304 =$$

= 9,216 + 8,584 = 17,8

$P_0 = \frac{1}{17,8} \simeq 0,0562$

$P_1 = \frac{3*\frac{4}{5}}{1} * 0,0562 = 0,1349$

$P_2 = \frac{\left(3*\frac{4}{5}\right)^2}{2} * 0{,}0562 = 0{,}1619$

Logo, $P_{<3} = 0{,}0562 + 0{,}1349 + 0{,}1619 = 0{,}3530$ e a probabilidade de um cliente ter que esperar na fila é 1 - 0,3530 = 0,6470 > 0,20, logo, com 3 funcionários não se garante que a probabilidade de um cliente ter de esperar seja inferior a 20%.

Para 4 funcionários, de modo análogo, temos que calcular $P_{<4} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$.

Temos, então, com s = 4 e $\rho = \frac{\lambda}{s*\mu} = \frac{12}{4*5} = \frac{3}{5}$:

$\frac{1}{P0} = \frac{(s^s\rho^{s+1})}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s}\frac{(s\rho)^n}{n!} = \frac{4^4\left(\frac{3}{5}\right)^{4+1}}{4!\left(1-\frac{3}{5}\right)} + \sum_{n=0}^{4}\frac{\left(4\frac{3}{5}\right)^n}{n!} = 2{,}0736 + 1 + 2{,}4 + 2{,}88 + 2{,}304 + 1{,}3824$
$= 12{,}04$

$P_0 = \frac{1}{12{,}04} \simeq 0{,}0831$

$P_1 = \frac{4*\frac{3}{5}}{1} * 0{,}0831 = 0{,}1994$

$P_2 = \frac{\left(4*\frac{3}{5}\right)^2}{2} * 0{,}0831 = 0{,}2393$

$P_3 = \frac{\left(4*\frac{3}{5}\right)^3}{6} * 0{,}0831 = 0{,}1915$

Logo, $P_{<4} = 0{,}0831 + 0{,}1994 + 0{,}2393 + 0{,}1915 = 0{,}7133$ e a probabilidade de um cliente ter que esperar na fila é 1 - 0,7133 = 0,2867 > 0,20, logo, com 4 funcionários ainda não se garante que a probabilidade de um cliente ter de esperar seja inferior a 20%.

Para 5 funcionários, de modo análogo, temos que calcular $P_{<5} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

Temos, então, com s = 5 e $\rho = \frac{\lambda}{s*\mu} = \frac{12}{5*5} = \frac{12}{25}$:

$\frac{1}{P0} = \frac{(s^s\rho^{s+1})}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s}\frac{(s\rho)^n}{n!} = \frac{5^5\left(\frac{12}{25}\right)^{5+1}}{5!\left(1-\frac{12}{25}\right)} + \sum_{n=0}^{5}\frac{\left(5\frac{12}{25}\right)^n}{n!} = 0{,}6125 + 1 + 2{,}4 + 2{,}88 + 2{,}304 +$
$1{,}3824 + 0{,}6636$
$= 11{,}2425$

$P_0 = \frac{1}{11{,}2425} \simeq 0{,}0889$

$P_1 = \frac{5*\frac{12}{25}}{1!} * 0{,}0889 = 0{,}2134$

$P_2 = \frac{\left(5*\frac{12}{25}\right)^2}{2!} * 0{,}0889 = 0{,}2560$

$P_3 = \frac{\left(5*\frac{12}{25}\right)^3}{3!} * 0{,}0889 = 0{,}2048$

$P_4 = \frac{\left(5*\frac{12}{25}\right)^4}{4!} * 0{,}0889 = 0{,}1229$

Logo, $P_{<5} = 0{,}0889 + 0{,}2134 + 0{,}2560 + 0{,}2048 + 0{,}1229 = 0{,}886$ e a probabilidade de um cliente ter que esperar fila é 1 - 0,886 = 0,114 < 0,20, logo, a partir dos 5 funcionários, garante-se que a probabilidade de um cliente ter que esperar na fila é

inferior a 20%.

c) (0.5 val.) Em termos médios e considerando 3 funcionários, qual o número médio de clientes à espera de ser atendido?

Queremos saber o número médio de clientes à espera de ser atendido, que é o comprimento médio da fila de espera $L_q = \frac{s^s \rho^{s+1} P0}{s!(1-\rho)^2}$

Com 3 funcionários temos:

$\rho = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

s=3

$P_0 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{17{,}8}} \simeq 0{,}0562$

$L_q = \frac{s^s \rho^{s+1} P0}{s!(1-\rho)^2} = \frac{3^3 \frac{4}{5}^{3+1} 0{,}0562}{3!(1-\frac{4}{5})^2} = \frac{0{,}6215}{0{,}24} = 2{,}5896$

Temos, então, que em media, o número de clientes à espera para serem atendidos é de 2,5896.