

U.C. 21082

Matemática Finita

11 de junho de 2015

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 9 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
3.0	3.0	5.0	1.5	3.5

Nome:

N^o de Estudante: B. I. n^o

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Entre 100 estudantes das Licenciaturas em Informática e em Matemática e Aplicações, 43 estão inscritos em Matemática Finita, 52 estão inscritos em Elementos de Probabilidades e Estatística e 30 não estão inscritos, nem em Matemática Finita, nem em Elementos de Probabilidades e Estatística. O número de estudantes inscritos, simultaneamente, em Matemática Finita e em Elementos de Probabilidades e Estatística é igual a:

- | | |
|--------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> a) 95 | <input type="checkbox"/> c) 70 |
| <input type="checkbox"/> b) 25 | <input type="checkbox"/> d) A nenhum dos valores anteriores |

2. O coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(7 - 6x)^{10}$ é igual a:

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) $\binom{10}{4}$ | <input type="checkbox"/> c) $(-6)^{10} \binom{10}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> b) $6 \binom{10}{4}$ | <input type="checkbox"/> d) $(-6)^4 7^6 \binom{10}{4}$ |

3. Dados dois números inteiros m e n positivos e uma aplicação sobrejectiva

$$f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n,$$

à partida pode dizer-se que...

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) $m \leq n$ | <input type="checkbox"/> c) $m \geq n$ |
| <input type="checkbox"/> b) $m = n$ | <input type="checkbox"/> d) $m \neq n$ |

Nome:
Nº de Estudante: B. I. nº
Turma Assinatura do Vigilante:

4. Relativamente aos números 72684 e 7284 podemos afirmar:

- a) Ambos são divisíveis por 9
- b) 72684 é divisível por 9, mas 7284 não é
- c) 7284 é divisível por 9, mas 72684 não é
- d) Nenhum deles é divisível por 9

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. Considere um conjunto de n homens e n mulheres. Determine, justificando:

- 5.1. De quantas maneiras se podem sentar todos os homens e mulheres numa bancada com $2n$ lugares de modo que nenhum par de homens se sente em lugares contíguos.
- 5.2. Quantos subconjuntos com igual número de homens e de mulheres se podem formar.

6. Mostre que:

6.1.
$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}.$$

6.2.
$$\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

7. Considere $4n^3 - n$, $n \in \{1, 2, \dots\}$.

- 7.1. Por recurso ao **método de indução matemática** prove que 3 é um divisor de $4n^3 - n$.
- 7.2. Mostre que $4n^3 - n$ é um número par se, e só se, n é par.
- 7.3. Determine, justificando, todos os números inteiros positivos n tais que

$$4n^3 \equiv n \pmod{6}.$$

8. Por recurso ao algoritmo de Euclides calcule $\text{mdc}(273, 111)$.

9. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$-a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

- 9.1. Determine o termo geral da sucessão.
- 9.2. Mostre que todos os termos desta sucessão são múltiplos de 2.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM